I 24761

2022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL VII

ANUL 1927—1928

BIBLIOTECA „ASTRA"

TIMIȘOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1928.

'05

2014

I 24761

ANUL VII. 15 MARTIE 1927 NO. 1

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. G. CONSTANTINESCU. VARIATIUNEA EXPRESIUNII $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a'x^2+b'x+c'}{ax^2+jx+c}$
2. NOTE MATEMATICE, 1, 2.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 565, 567, 577, 594, 597.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

2455

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Revista Matematică din Timişoara apare sub conducerea unui comitet compus din următorii:

Abasohn Ernest,	inginer, licenţiat în matematici, profesor la liceul Cantemir, Justinian 18, Bucureşti.
Abramescu N.,	Doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Adam D. Romeo,	Sublocot. de geniu, str. Erbăriei 29, Bucureşti.
Adamescu Maxim,	licenţiat în matematici, inspector financiar, str. Flondor 37, Cernăuţi.
Alaci Valeriu,	doctor în matematici, profesor la şc. Politechnică Timişoara, str. General Foch 27, Timişoara.
Alexandrescu El.,	profesoară la externatul secundar de fete, Argetoianu 7, Constanţa.
Angelescu A.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Angheluţă Th.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Arghir Iancu,	profesor la liceul din Tg.-Jiu.
Bădulescu Vasile,	profesor liceul Şincai, Bucureşti.
Balaban N.,	profesor liceul Carol I, Craiova.
Balaban Gh.,	profesor şcoala secundară de fete gr. II, „Sturza Cantacuzino", Roman.
Balasz D.,	inginer, asistent la şcoala Politechnică, str. General Joffre 12, Timişoara.
Bănărescu Marin,	inginer, la atelierele C. F. R., profesor la Politechnică, str. Doja 51, Timişoara.
Banciu I.,	profesor, str. Lucaci 95, Bucureşti.
Baron C.,	asistent la catedra de fizică la şc. Politechnică din Timişoara.
Blaşian V.,	inginer de mine, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.
Botez Mihai,	profesor la şcoala normală şi liceul militar, str. Speranţei 12, Iaşi.
Bratu Gh.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Breazu D.,	profesor la liceul din Caracal.
Buicliu Gh.,	colonel în artilerie, comandantul şcoalei speciale de artilerie, profesor la şcoala Politechnică Timişoara.
Burghele C.,	inginer,
Butoescu Tr.,	inginer la uzina electrică Arad, asistent la şcoala Politechnică.
Cândea C.,	doctor-inginer, profesor la şcoala Politechnică din Timişoara,
Caraman E.,	director şcoala normală, Galaţi.
Cârdeiu V.,	profesor la liceul Aron Pumnul, Cernăuţi.
Chivulescu C.,	licenţiat în matematici, inspector financiar, Târgovişte.
Cica Gh.,	profesor la liceul Piteşti.
Cismărescu M.,	licenţiat în matematici, inspector financiar, T.-Severin.
Ciurceu V.,	inginer la uzina electrică Timişoara.
Corneanu P.,	inginer la societatea Concordia Gura-Ocniţei, Dâmboviţa.
Constantinescu Gh.,	profesor, piaţa Elea 18, Craiova.
Crăciunescu I.,	profesor la liceul Cantemir, Bucureşti.
Cristescu I.,	inginer, profesor la şcoala Politechnică Timişoara.
Coman August,	profesor lic. C. Diaconovici-Loga, conferenţiar la şc. Politechnică, str. Feldioara 1, Timişoara,
Diaconescu Nic.,	profesor liceul din Slatina.
Dragalina Corneliu,	lt.-colonel în artilerie, str. Gen. Dragalina, No. 1, Bucureşti.
Dumitrescu Crt,	profesor la liceul militar M-rea Dealul, Târgovişte.
Dumitrescu Gh.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Dumitriu-Arad I.,	profesor la liceul Moise Nicoară, str. Bucur 3, Arad.
Duţulescu Marin,	licenţiat în matematici. inspector financiar, str. Eminescu 20, Bucureşti.
Florescu Mihai,	inginer inspector silvic, str. Alex. Orescu 9, Bucureşti.
Georgescu D.,	profesor la liceul din Piteşti, str. Negru-Vodă 14, Piteşti.
Ghermănescu M.,	profesor la liceul Cantemir, str. Raion 31, Bucureşti.
Hubert M.,	inginer, profesor la şcoala de meserii, bul. Mihai-Viteazul 21, Timişoara.
Hristea Horaţiu,	inginer la dep. C. F. R., asistent la şc. politechnică, Timişoara.
Ionescu K. C.,	directorul liceului Real Dr. Meşotă, Braşov.
Jecu M. Ioan,	licenţiat în matematici, str. V. Lascar (Teilor) 77, Bucureşti.
Lalescu Traian,	doctor în matematici, profesor la Universitatea şi şcoala Politechnică din Bucureşti, fost rector la şcoala Politechnică din Timişoara, Vasile Boerescu 19, Bucureşti.
Leonida D.,	inginer, profesor la şcoala Politechnică, str. Sălcii 11, Bucureşti.
Linteş I.,	căpitan de artilerie, Licurg 4, Bucureşti.
Liteanu Gh.,	maior, în artilerie, Alea Sevastopol 27, Bucureşti.
Lupan Andrei,	inginer, director la Soc. Reşiţa, profesor la şc. Politechnică, str. Povernei 3, Bucureşti.
Magheru I.,	doctor în ştiinţe, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.

Manughevici C.,	inginer chimist, şef de lucrări la şcoala Politechnică, str. Paui Chinezul 7, Timişoara.
Mardan D.,	inginer-şef, directorul fabricei de tutun, profesor la şc. Politechnică din Timişoara, Fabrica de tutun, Timişoara,
Mihaly Elemér,	profesor la liceul din Deva.
Mioc V.,	profesor la liceul Diaconovici-Loga, Timişoara.
Naneş Gh.,	profesor la lic. Sf. Sava, Bucureşti.
Nicolau Alex.,	inginer, profesor la şcoala Politechnică, director uzina electrică, Craiova.
Nicolau Pompiliu,	inginer, profesor la şcoala Politechnică.
Noaghea Gh.,	profesor la liceul din Caransebeş
Nichifor Gh.,	doctor în matematici, conferenţiar la Universitatea din Bucureşti, str. Racoviţă 32, Bucureşti.
Oncica Ioan,	profesor la liceul Piteşti.
Onicescu O.,	profesor universitar, Clopotarii-vechi 25, Bucureşti.
Orăşeanu C.,	inginer-şef. licenţiat în matematici, profesor la şcoala Politechnică, Bucureşti.
Orăşeanu Gr.,	profesor la lic. Sf. Petru şi Pavel Ploeşti.
Otopeanu C.,	inginer.
Petrescu A.,	doctor în matematici, directorul Academiei Agricole Cluj.
Petricoane D. M.,	directorul liceului din Oraviţa.
Purcariu Ilie,	director general Ministerul de instrucţie, Bucureşti.
Roibănescu C.,	prof., Bul. I. C. Brătianu, Tg.-Jiu.
Protopopescu I.,	inginer, profesor şi subdirectorul şcoalei Politechnice Timişoara.
Saegiu E.,	inginer-şef, serviciul construcţii C. F. R., str. Berzei 70, Bucureşti.
Şerbănescu D-tru,	inginer la calea ferată Arad-Podgorie, asist. la şc. Politechnică, Timişoara.
Sergescu P.,	doctor în matematici, licenţiat în filosofie, profesor la Universitate, Cluj.
Severineanu C.,	inginer-şef, directorul serviciului Tracţiunei C. F. R., profesor la şcoala Politechnică, Timişoara.
Simniceanu Sava,	profesor, str. Griviţei 3, Craiova.
Spineanu Cezar,	profesor, str. Vestei 24, Târgovişte.
Stăncescu C.,	doctor-inginer, profesor la şcoala Politechnică, str. Bem 8, Timişoara.
Stoicescu M.,	prof. str. Zefirului 4, Bucureşti.
Teodorescu Constantin,	inginer-şef, profesor la şcoala Politechnică, directorul şcoalei superioare p. t. t., Timişoara.
Thierrin Gabriel,	profesor, directorul inst. Schewitz Thierrin, str. Scaune 33, Bucureşti.
Ţino Ovidiu,	profesor, liceul Şincai, str. Cornea, 80, Bucureşti.
Toporescu E.,	doctor în chimie dela Sorbona, profesor la şcoala Politechnică, Bucureşti.
Teodosiu Avram,	doctor în matematici, profesor la Academia Agricolă, Cluj.
Vâlcovici V.,	doctor în matematici, rectorul şcoalei Politechnice str. Doja 33, Timişoara.
Vasiliu M.,	inginer, asistent la şcoala Politechnică Bucureşti, str. Obedenaru 10, Bucureşti.
Vasiliu Gh.,	inginer la depozitul C. F. R. calea Traian 23, Satu-Mare.
Vlad I. V.,	inginer-arhitect, profesor la şc. Politechnică, str. Bonnaz 20, Timişoara.
Zapan Grigore,	căpitan-aviator, str. Carol 9, Tecuci.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** —profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

ANUL VII — NO. 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1927

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

VARIAȚIUNEA EXPRESIUNII

$$y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a'x^2+b'x+c'}{ax^2+bx+c}.$$

de G. CONSTANTINESCU
Profesor Craiova

Variațiunea acestei expresiuni se găsește tratată în toate cărțile de Algebră, atât elementar cât și cu ajutorul derivatelor, însă în nici una din cărțile întrebuințate de mine n'am văzut un studiu general al variațiunii acestei funcțiuni, și numai indicarea generală a găsirii maximului și minimului și apoi trecerea la aplicații numerice.

In articolul de față îmi propun a studia 3 chestiuni asupra acestei funcțiuni.

1) A găsi o formulă generală care să dea maximul și minimul acestei expresiuni și a discuta diferitele cazuri când funcțiunea are sau nu maxim și minim.

2) A găsi relațiuni geometrice între valorile variabilei x pentru care funcțiunea devine maximă și minimă și între rădăcinele ecuațiunilor $f(x)=0$ și $\varphi(x)=0$.

3) A construi grafic curba reprezentativă a expresiunii date și deci a studia variațiunea expresiunii fără a face alte calcule decât aflarea rădăcinilor lui $f(x)=0$ și $\varphi(x)=0$.

1) Pentru găsirea unei formule generale care să ne dea maximul și minimul acestei expresiuni, presupunem 3 cazuri după cum rădăcinele numitorului $\varphi(x)=ax^2+bx+c$ sunt: *a)* reale și distincte *b)* reale și egale și *c)* imaginare.

a) In cazul acesta avem $b^2-4ac>0$ sau $\alpha>\beta$ unde α și β sunt rădăcinele lui $\varphi(x)=0$. In acest caz expresiunea dată se poate scri sub forma:

$$y=\frac{a'x^2+b'x+c'}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+C$$

unde A, B, C sunt 3 constante pe care să le determinăm.

Eliminând numitorii expresiunea devine:

$$a'x^2+b'x+c'=A\,a(x-\beta)+B\,a(x-\alpha)+C\,a(x-\alpha)(x-\beta).$$

In această expresiune facem succesiv pe x egal cu α, β și zero și găsim valorile constantelor A, B și C care sunt:

$$A=\frac{f(\alpha)}{a(\alpha-\beta)},\quad B=-\frac{f(\beta)}{a(\alpha-\beta)}\quad\text{și}\quad C=\frac{a'}{a}.$$

Constantele A, B, C fiind determinate expresiunea de mai sus se poate scri sub forma:

$$(1)\qquad y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a'x^2+b'x+c'}{ax^2+bx+c}=\frac{f(\alpha)}{a(\alpha-\beta)}\cdot\frac{1}{x-\alpha}-\frac{f(\beta)}{a(\alpha-\beta)}\cdot\frac{1}{x-\beta}+\frac{a'}{a}.$$

Pentru a găsi maximul și minimul trebue să luăm derivata expresiunii și rădăcinile acestei derivate ne va da valorile lui x pentru care funcțiunea devine maximă și minimă.

Luând derivata membrului al doilea și egalând-o cu zero obținem:

$$(2)\qquad \frac{f(\alpha)}{(x-\alpha)^2}-\frac{f(\beta)}{(x-\beta)^2}=0.$$

Această ecuație este de gradul al 2-lea și va avea 2 rădăcini, x' și x'' care introduse în valoarea funcțiunii ne va da maximul și minimul funcțiunii date.

Pentru a rezolva această ecuațiune o punem sub forma:

$$\frac{\sqrt{f(\alpha)}}{x-\alpha}=\pm\frac{\sqrt{f(\beta)}}{x-\beta}=\pm\frac{\sqrt{f(\beta)}-\sqrt{f(\alpha)}}{\alpha-\beta}.$$

Din aceste rapoarte găsim:

$$(3) \qquad x-\alpha=\frac{(\alpha-\beta)\sqrt{f(\alpha)}}{\pm\sqrt{f(\beta)}-\sqrt{f(\alpha)}}$$

și

$$x-\beta=\frac{\pm(\alpha-\beta)\sqrt{f(\beta)}}{\pm\sqrt{f(\beta)}-\sqrt{f(\alpha)}}.$$

Inmulțim succesiv aceste două relațiuni cu $\sqrt{f(\alpha)}$ și $\pm\sqrt{f(\beta)}$ obținem:

$$(3') \qquad x-\alpha=\frac{(\alpha-\beta)f(\alpha)}{\pm\sqrt{f(\alpha)f(\beta)}-f(\alpha)}$$

și

$$x-\beta=\frac{(\alpha-\beta)f(\beta)}{f(\beta)\mp\sqrt{f(\alpha)f(\beta)}}.$$

Din aceste relațiuni care reprezintă valorile lui x' și x'' pentru care funcțiunea devine maximă, deducem că aceste valori ale lui x' și x'' vor fi reale numai în cazul când:

$$(4) \qquad f(\alpha).f(\beta)>0.$$

Să cercetăm acum în ce caz această condițiune este împlinită. Pentru această distingem iar 3 cazuri după cum numărătorul $f(x)=a'x^2+b'x+c'$ are rădăcini: (1) reale și distincte, (2) reale și egale, (3) imaginare.

1) In cazul când $f(x)=0$ are rădăcinele reale și distincte, relațiunea (4) va fi satisfăcută numai în cazul când ambele rădăcini α și β ale numitorului, vor fi amândouă cuprinse între rădăcinile α' și β' ale numărătorului sau amândouă în afară de rădăcinile α' și β' ale numărătorului căci numai în aceste cazuri $f(\alpha)$ și $f(\beta)$ sunt de aceleaș semne și deci relațiunea (4) va fi satisfăcută.

Urmează deci, că expresiunea dată, nu va avea maxim și minim în cazul când una din rădăcinile α sau β ale numitorului vor fi cuprinse, una între rădăcinile α' și β' și cealaltă în afară de aceste rădăcini, căci în acest caz $f(\alpha)$ și $f(\beta)$ sunt de semne contrare și deci relațiunea (4) nu va fi satisfăcută.

2) In cazul acesta $f(x)=ax^2+bx+c$ are rădăcini reale și egale și deci se poate pune sub forma unui patrat perfect.

In acest caz $f(\alpha)$ și $f(\beta)$ sunt în totdeauna de acelaș semn și relațiunea (4) va fi totdeauna satisfăcută și deci expresiunea dată va avea întotdeauna maxim și minim.

3) In cazul acesta $f(x)=0$ are rădăcinile imaginare și deci atât $f(\alpha)$ cât și $f(\beta)$ vor fi de acelaș semn și relațiunea (4) va fi totdeauna satisfăcută.

Urmează din cele spuse până aci că, în cazul când numitorul are rădăcini reale și distincte, expresiunea dată va avea maxim și minim întotdeauna, afară de cazul când rădăcinile numitorului vor fi cuprinse: una între rădăcinile numărătorului și cealaltă în afară de rădăcinile numărătorului.

Știind acum când expresiunea dată are maxim sau minim să aflăm acel maxim și minim înlocuind valorile lui x date de relațiunile (3') în expresiunea (1) și vom găsi:

$$y-\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{a}.\frac{\pm\sqrt{f(\alpha)f(\beta)}-f(\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}-$$

$$\frac{1}{a'}.\frac{f(\beta)\mp\sqrt{f(\alpha)f(\beta)}}{(\alpha-\beta)^2}+\frac{a'}{a}$$

sau:

$$y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a'}{a}-\frac{(\sqrt{f(\alpha)}\pm\sqrt{f(\beta)})^2}{a(\alpha-\beta)^2}.$$

Ținând seamă de relațiunea (3) expresiunea maximului și minimului se poate pune sub forma:

$$(5) \qquad y=\frac{a'}{a}-\frac{f(\alpha)}{a(x-\alpha)^2}$$

unde se înlocuește x cu cele două valori date de formulele (3).

Din această formulă deducem că atât maximul cât și minimul se găsesc amândouă deasupra sau dedesuptul liniei $y=\frac{a'}{a}$ care se numește asimptota curbii date.

Cum pe a, îl putem socoti totdeauna pozitiv căci în cazul când ar fi negativ, înmulțind și numărătorul și numitorul cu (-1), a devine pozitiv și expresiunea nu-și schimbă semnul, urmează că a' împreună cu compararea rădăcinilor numărătorului și numitorului ne va da poziția maximului și minimului față de dreapta $y=\frac{a'}{a}$.

Astfel dacă (1) $a'>0$, $\alpha<\alpha'<\beta'$ sau $\alpha'<\beta'<\alpha$ adică α cuprins în afară de rădăcinile numărătorului avem pe $f(\alpha)$ de acelaș semn cu a' și deci și

maximul și minimul sunt dedesuptul liniei $y=\frac{a'}{a}$.

2) $a'>0$ și $\alpha'<\alpha<\beta'$ adică α cuprins între rădăcinile numărătorului, atunci $f(\alpha)$ este de semn contrar cu a' și maximul și minimul sunt deasupra liniei $y=\frac{a'}{a}$.

3) $a'<0$ și $\alpha'<\alpha<\beta'$ în acest caz $f(\alpha)$ este de semn contrar cu a' și maximum și minimum sunt dedesuptul liniei $y=\frac{a'}{a}$.

4) $a'<0$ și $\alpha<\alpha'<\beta'$ sau $\alpha'<\beta'<\alpha$ atunci $f(\alpha)$ este de acelaș semn cu a' și maximum și minimum sunt dedesuptul liniei $y=\frac{a'}{a}$.

b) In acest caz $\varphi(x)=0$ are rădăcinile egale $\alpha=\beta$ și deci $b^2-4ac=0$. Expresiunea dată se poate scri sub forma:

$$y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a'x^2+b'x+c'}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{(x-\alpha)^2}+\frac{B}{(x-a)}+C.$$

Ellminând numitorii găsim:

$$a'x^2+b'x+c'=f(x)=Aa+Ba(x-\alpha)+Ca(x-\alpha)^2.$$

Facem pe $x=\alpha$ și găsim că $A=\frac{f(\alpha)}{a}$.

Derivând expresiunea de mai sus și făcând pe $x=\alpha$ găsim că $B=\frac{f'(\alpha)}{a}$ și $C=\frac{a'}{a}$ Constantele A, B, C fiind determinate expresiunea se poate pune sub forma:

$$(6)\qquad y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(\alpha)}{a(x-\alpha)^2}+\frac{f'(\alpha)}{a(x-\alpha)}+\frac{a'}{a}.$$

Pentru a găsi maximul și minimul acestei expresiuni trebue să luăm derivata și să găsim rădăcinile acestei derivate.

Derivând găsim:

$$-\frac{2f(\alpha)}{a(x-\alpha)^3}-\frac{f'(\alpha)}{a(x-\alpha)^2}=-\frac{2f(\alpha)-(x-\alpha)f'(\alpha)}{a(x-\alpha)^3}=0.$$

Această ecuație a derivatei își schimbă semnul pentru $x'=\alpha$ și $x''=\alpha+\frac{2f(\alpha)}{f'(\alpha)}$. Urmează deci că în acest caz avem maxim și minim în totdeauna numai că unul din ele coincide cu $\pm\infty$ pentru că $x'=\alpha$ este punct de discontinuitate al funcțiunii.

Maximul și minimul se va obține înlocuind valoarea lui x'' în expresiunea (6) și vom avea:

$$(7)\qquad y=\frac{f'^2(\alpha)}{4af(\alpha)}+\frac{f'^2(\alpha)}{2af(\alpha)}+\frac{a'}{a}=\frac{a'}{a}+\frac{3f'^2(\alpha)}{4af(\alpha)}.$$

Această formulă (7) ne dă maximul sau minimul în cazul când $\alpha=\beta$.

c) In acest caz numitorul:

$$\varphi(x)=ax^2+bx+c=0$$

are 2 rădăcini imaginare $\alpha=p+iq$ și $\beta=p-iq$.

Expresiunea dată se poate pune sub forma (1) și ecuațiunea derivatei (2) se poate pune sub forma:

$$\frac{f(p+iq)}{(x-p-iq^2}=\frac{f(p-iq)}{(x-p+iq)^2}$$

sau:

$$\frac{\sqrt{f(p+iq)}}{(x-p-iq)}=\frac{\pm\sqrt{f(p-iq)}}{(x-p+iq)}.$$

Punem pe $\sqrt{f(p+iq)}=A+iB$ și $\sqrt{f(p-iq)}=A-iB$ și ecuațiunea derivatei se poate scri:

$$\frac{A+iB}{x-p-iq}=\frac{A-iB}{x-p+iq}=\frac{A}{x-p}=\frac{-B}{q}$$

și:

$$\frac{A+Bi}{x-p-qi}=-\frac{A-Bi}{x-p+qi}=\frac{Bi}{x-p}=\frac{-A}{qi}.$$

Din aceste ecuațiuni găsim:

$$(8)\qquad x'=p-\frac{Aq}{B}\quad\text{și}\quad x''=p+\frac{Bq}{A}.$$

Din aceste relațiuni deducem că formulele (3) și (3') ne dau în acest caz valori reale pentru x' și x'' și deci funcțiunea dată, va avea în totdeauna maxim și minim. Din cele văzute până aci se deduce că funcțiunea $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ are întotdeauna maxim și minim afară de cazurile când atât numărătorul cât și numitorul au rădăcini reale și satisfac următoarelor relațiuni:

$$\begin{cases}\alpha<\alpha'<\beta<\beta'\\ \alpha'<\alpha<\beta'<\beta\end{cases}$$

II

Pentru a găsi relațiuni geometrice între x' și x'' rădăcinile derivatei și între α', β și α', β' rădăcinile lui $\varphi(x)=0$ și $f'(x)=0$, îmi propun să tratez următoarea chestiune:

Fiind date 2 ecuații de gr. II:

$$a x^2 + b x + c = 0$$
$$a' x^2 + b' x' + c' = 0$$

ale căror rădăcini sunt α, β și α', β', să se găsească condițiunea ca aceste rădăcini să formeze o diviziune armonică.

Dacă pe o axa luăm 4 puncte ale căror abscise să fie egale cu valorile lui α, β și α', β' aceste puncte formează o diviziune armonică atunci când vom avea relațiunea:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \alpha'} = -\frac{\alpha - \beta'}{\beta - \beta'}$$

sau desvoltată:

$$2(\alpha\beta + \alpha'\beta') = (\alpha + \beta)(\alpha' + \beta').$$

Inlocuim în această formulă pe:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a},\ \alpha'\beta' = \frac{a'}{a'},\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ și } \alpha' + \beta' = -\frac{a'}{b'}$$

găsim:

$$2(c a' + a c') = b b'. \tag{9}$$

Această relațiune este tocmai condițiunea care trebue s'o îndeplinească coeficienții celor 2 ecuații pentru ca rădăcinile lor să formeze o diviziune armonică.

Odată această chestiune tratată, putem să dovedim acum că rădăcinile x', x'' ale derivatei formează o diviziune armonică, atât cu rădăcinile α și β ale numitorului cât și cu rădăcinile α' și β' ale numărătorului.

Pentru a dovedi aceasta luăm derivata funcțiunii date și obținem:

$$y' = \frac{(b a' - a b') x^2 + 2(c a' - a c') x + c b' - b c'}{(a x^2 + b x + c)^2}.$$

Comparăm numărătorul acestei derivate cu cele două ecuații:

$$a x^2 + b x + c = 0 \text{ și } a' x^2 + b' x + c' = 0$$

găsim că relațiunea (9) este satisfăcută după cum se vede din următoarele relațiuni:

$$2[c(b a' - a b') + a(c b' - b c')] = 2b(c a' - a c')$$

și:

$$2[c'(b a' - a b') + a'(c b' - b c')] = 2b'(c a' - a c'),$$

urmează de aci că rădăcinile x' și x'' ale derivatei, formează o diviziune armonică, atât cu rădăcinile numărătorului cât și cu ale numitorului.

Din această proprietate, putem să comparăm rădăcinile x' și x'' cu rădăcinile α', β' și α, β și anume una din rădăcini va fi cuprinsă între α și β și cealaltă în afară de ele și tot așa față de α' și β'.

Tot din această proprietate mai deducem că atunci când numitorul sau numărătorul va avea o rădăcină dublă, una din valorile x' și x'' va fi egală cu acea rădăcină dublă.

Aceste proprietăți ale lui x' și x'' sunt adevărate numai când α, β, α', β' sunt reale.

Să cercetăm cum sunt așezate rădăcinile x' și x'' când numărătorul sau numitorul ar avea rădăcini imaginare.

Din relațiunile:

$$x' = p - \frac{A q}{B},\quad x'' = p + \frac{B q}{A} \tag{8}$$

deducem că $(x' - p)(x'' - p) = -q^2$. Această relațiune ne arată că x' și x'' sunt de o parte și de alta a lui p, care este partea reală a rădăcinii numitorului. Deci rădăcinile derivatei satisfac relațiunea: $x' < p < x''$.

Să dovedim că rădăcinile x' și x'' se bucură de aceiași proprietate și față de rădăcinile numărătorului în cazul când ele ar fi imaginare. Rădăcinile x' și x'' formează cu α' și β' o diviziune armonică și deci vom avea relațiunea:

$$\frac{x' - \alpha'}{x'' - \alpha'} = -\frac{x' - \beta'}{x'' - \beta'}$$

din care deducem:

$$\frac{\beta' - \alpha'}{2x'' - \alpha' - \beta'} = \frac{2x' - \alpha' - \beta'}{\beta' - \alpha'} = k.$$

Din aceasta deducem:

$$2x' = \alpha' + \beta' + k(\beta' - \alpha')$$
$$2x'' = \alpha' + \beta' + \frac{1}{k}(\beta' - \alpha')$$

Inlocuim aci pe $\alpha' = p' + i q'$ și $\beta' = p' - i q'$ găsim:

$$x' - p' = -k q' i$$
$$x'' - p' = -\frac{1}{k} q' i.$$

Făcând produsul lor găsim:

$$(x' - p')(x'' - p') = -q'^2.$$

Această relaţiune ne arată întocmai ca şi mai sus că rădăcinile x', x'' sunt de o parte şi de alta a lui p' care este partea reală a rădăcinii numărătorului.

Aceste proprietăţi ale lui x' şi x'' ne vor ajuta la construcţia graficá a curbei reprezentative a funcţiunii: $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

III

Pentru a construi grafic curba reprezentativă a expresiunii:

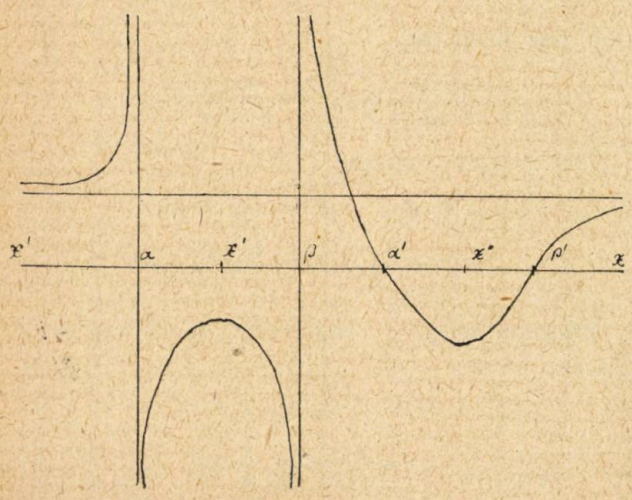
$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c}$$

deosebim 3 cazuri după cum rădăcinile α şi β ale numitorului sunt: 1) reale şi distincte 2) reale şi egale 3) imaginare.

1) Rădăcinile α şi β fiind reale, ele sunt puncte de discontinuitate pentru funcţiune şi deosebim şi aci 3 cazuri, după cum numărătorul are rădăcinile: (*a*) reale şi distincte, (*b*) reale şi egale, (*c*) imaginare.

a) Rădăcinile α' şi β' fiind reale pot fi comparate cu rădăcinile numitorului α şi β şi după poziţia unora faţă de altele vom avea următoarele 5 cazuri:

1) $\alpha < \beta < \alpha' < \beta'$, 2) $\alpha < \alpha' < \beta < \beta'$, 3) $\alpha' < \alpha < \beta < \beta'$, 4) $\alpha' < \alpha < \beta' < \beta$, 5) $\alpha' < \beta' < \alpha < \beta$.



1) $\alpha < \beta < \alpha' < \beta'$. In cazul acesta rădăcinile numitorului fiind amândouă cuprinse în afară de rădăcinile numărătorului vom avea maxim şi minim şi cum x' şi x'' formează o diviziune armonică atât cu α şi β cât şi cu α' şi β' trebue să satisfacă la următoarea relaţiune:

$$\alpha < x' < \beta < \alpha' < x'' < \beta'.$$

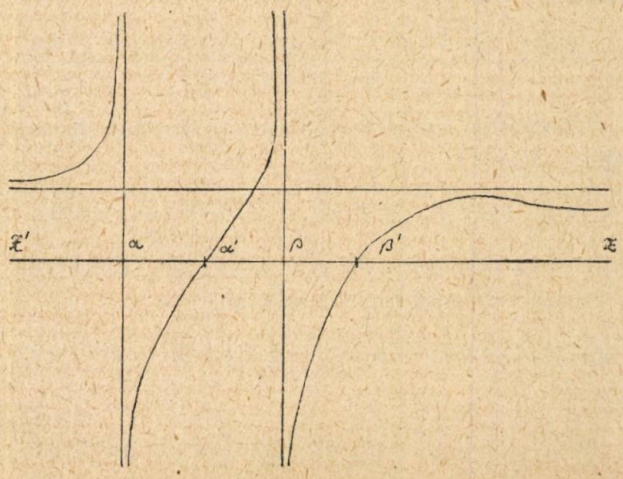
Dacă presupunem că $\frac{a'}{a}$ este pozitiv, funcţiunea pentru $x = -\infty$ este egală cu $\frac{a'}{a}$ care este pozitiv şi în intervalul $(-\infty, \alpha)$ funcţiunea trebue să crească dela $\frac{a'}{a}$ până la $(+\infty)$, căci până la $-\infty$ nu se poate duce de oarece funcţiunea nu are nici un zero în acest interval.

In intervalul α, β funcţiunea pleacă dela $-\infty$ creşte până la maximum pentru $x = x'$, apoi descreşte până la $(-\infty)$ pentru $x = \beta$.

In intervalul $(\beta, +\infty)$ funcţiunea pleacă dela $(+\infty)$ descreşte şi trece prin zero pentru $x = \alpha'$, descreşte înainte până la minimum pentru $x' = x''$ şi apoi creşte trecând prin zero pentru $x = \beta'$ şi continuă să crească înainte până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$.

In cazul când $\frac{a'}{a}$ este negativ variaţiunea expresiunei este inversă şi anume curba deasupra lui $x'x''$ vine dedesupt şi cea dedesupt deasupra lui $x'x''$.

2) $\alpha < \alpha' < \beta < \beta'$. In acest caz rădăcinile numitorului fiind cuprinse una între rădăcinile numărătorului şi alta în afară de aceste rădăcini nu vom avea maxim nici minim căci $f(\alpha)$, $f(\beta) < 0$.



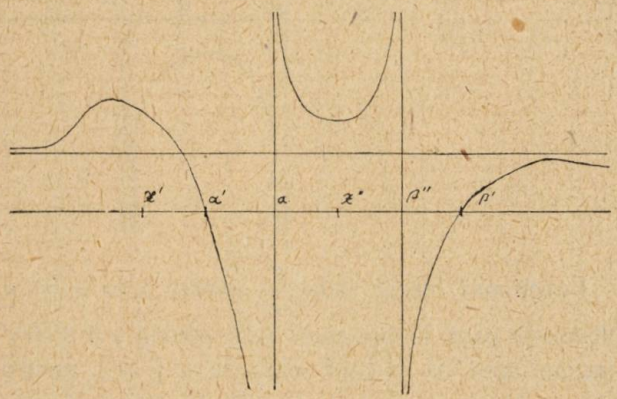
În acest caz funcțiunea pleacă dela $\frac{a'}{a}$ și crește până la $(+\infty)$ pentru $x=\alpha$, pentru că nu se anulează în acest interval și deci nu poate să treacă la $(-\infty)$, apoi în intervalul (α, β) pleacă dela $(-\infty)$ crește și trece prin zero pentru $x=\alpha'$ și continuă să crească până la $(+\infty)$ pentru $x=\beta$.

In intervalul $(\beta, +\infty)$ funcțiunea pleacă dela $(-\infty)$ și crește trecând prin zero pentru $x=\beta'$ și cnntinuă să crească până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x=+\infty$.

3) $\alpha'<\alpha<\beta<\beta'$. In acest caz rădăcinile numitorului fiind cuprinse amândouă între rădăcinile numărătorului, vom avea maxim și minim.

Și aci deosebim 2 cazuri după cum:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\alpha'+\beta'}{2} \text{ și } \frac{\alpha+\beta}{2}>\frac{\alpha'+\beta'}{2}.$$



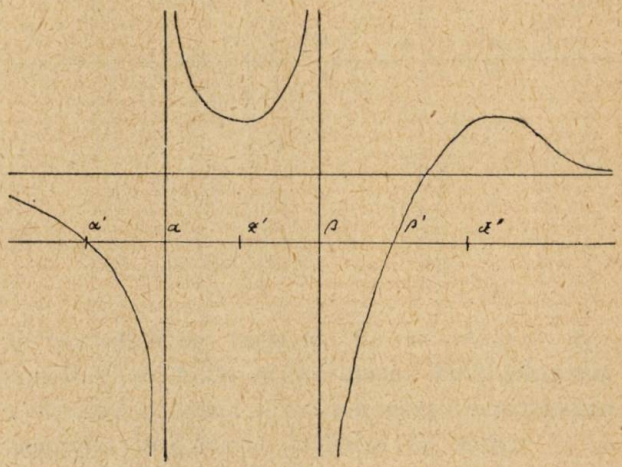
Când $\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\alpha'+\beta'}{2}$ valorile lui x' și x'' trebue să satisfacă următoarea relațiune:

$$x'<\alpha'<\alpha<x''<\beta<\beta'.$$

In acest caz funcțiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x=-\infty$ și crește până la maximum pentru $x=x'$, apoi descrește și trece prin zero pentru $x=\alpha'$ și continuă să descrească până la $(-\infty)$ pentru $x=\alpha$. In intervalul (α, β) funcțiunea pleacă dela $(+\infty)$ și descrește până la minimum pentru $x=x''$ apoi crește până la $+\infty$ pentru $x=\beta$. In intervalul $(\beta, +\infty)$, funcțiunea pleacă dela $(+\infty)$ crește și trece prin zero pentru $x=\beta'$ și continuă să crească până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x=+\infty$.

Când $\frac{\alpha+\beta}{2}>\frac{\alpha'+\beta'}{2}$ valorile lui x' și x'' trebue să satisfacă următoarea relațiune:

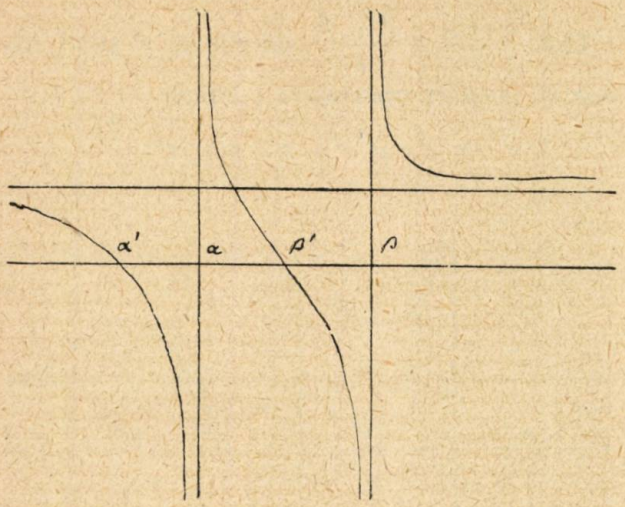
$$\alpha'<\alpha<x'<\beta<\beta'<x''.$$



In cazul acesta funcțiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x=-\infty$ și descrește trecând prin zero pentru $x=\alpha'$ continuă apoi să descrească până la $(-\infty)$ pentru $x=\alpha$. In intervalul (α, β) funcțiunea pleacă dela $(+\infty)$ descrește până la minimum pentru $x=x'$, apoi crește până la $(+\infty)$ pentru $x=\beta$. In intervalul $(\beta', +\infty)$ funcțiunea pleacă dela $(-\infty)$ crește și trece prin zero pentru $x=\beta'$ și continuă să crească până la maximum pentru $x=x''$ și apoi descrește până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x=+\infty$.

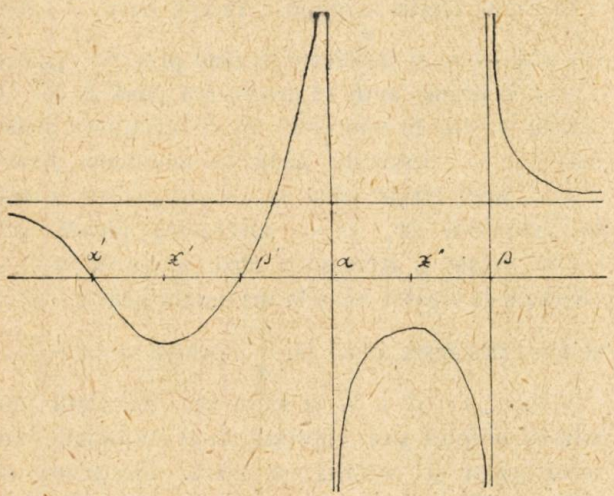
4) $\alpha'<\alpha<\beta'<\beta$. In acest caz rădăcinile numitorului fiind una cuprinsă între rădăcinile numărătorului și cealaltă în afară, funcțiunea nu admite nici maxim nici minim, fiindcă $f(\alpha)$, $f(\beta)<0$.

In acest caz funcțiunea pleacă dela $\frac{a'}{a}$ descrește trece prin zero pentru $x=\alpha'$ și continuă să descrească până la $(-\infty)$ pentru $x=\alpha$. In intervalul (α, β) funcțiunea pleacă dela $(+\infty)$ trece prin zero pentru $x=\beta'$ și continuă să descrească până la $(-\infty)$ pentru $x=\beta$. In intervalul $(\beta, +\infty)$ funcțiunea pleacă dela $(+\infty)$ și descrește până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x=+\infty$.



5) $\alpha' < \beta' < \alpha < \beta$. In acest caz rădăcinile numitorului fiind amândouă în afară de rădăcinile numărătorului avem maxim și minim și valorile x' și x'' trebue să satisfacă următoarea relațiune:

$$\alpha' < x' < \beta' < \alpha < x'' < \beta.$$



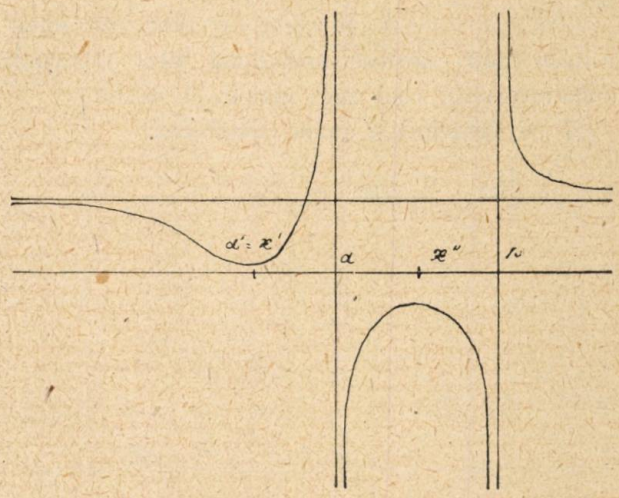
Funcțiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x = -\infty$ și descrește trecând prin zero pentru $x = \alpha'$ continuă să descrească până la minimum pentru $x = x'$, apoi crește trecând prin zero, pentru $x = \beta'$ și ajunge la $(+\infty)$ pentru $x = \alpha$. In intervalul (α, β) funcțiunea pleacă dela $(-\infty)$ crește până la maximum pentru $x = x''$ și apoi descrește până la $(-\infty)$ pentru $x = \beta$. In intervalul $(\beta, +\infty)$ funcțiunea pleacă dela $(+\infty)$ și descrește până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$.

b) In acest caz rădăcinile numărătorului fiind egale, una din valorile x' și x'' trebue să coincidă cu acea rădăcină și deci vom avea în totdeauna un maxim sau un minim egal cu zero.

După poziția rădăcinilor deosebim și aci 3 cazuri: 1) $\alpha' < \alpha < \beta$, 2) $\alpha < \alpha' < \beta$, 3) $\alpha < \beta < \alpha'$.

1) In cazul acesta $\alpha' < \alpha < \beta$ valorile lui x' și x'' trebue să verifice următoarea relațiune:

$$\alpha' = x' < \alpha < x'' < \beta.$$

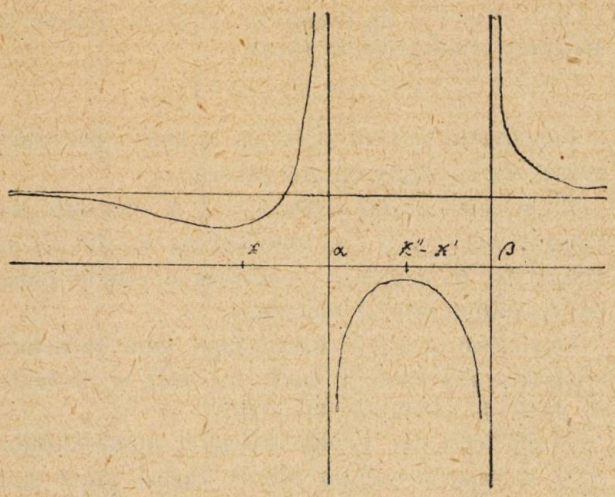


Funcțiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x = -\infty$ și descrește până la minimum zero pentru $x = x' = \alpha'$ începe apoi să crească până la $(+\infty)$ pentru $x = \alpha$. In intervalul (α, β) funcțiunea pleacă dela $(-\infty)$ crește până la maximum pentru $x = x''$, descrește apoi până la $(-\infty)$ pentru $x = \beta$. In intervalul $(\beta, +\infty)$ funcțiunea pleacă dela $+\infty$ și descrește până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$.

2) $\alpha < \alpha' < \beta$. In acest caz deosebim alte 2 cazuri după cum $\alpha' < \frac{\alpha+\beta}{2}$ și $\alpha' > \frac{\alpha'+\beta'}{2}$. In cazul când $\alpha' < \frac{\alpha+\beta'}{2}$ valorile lui x' și x'' trebue să satisfacă următoarea relațiune:

$$x' < \alpha < \alpha' = x'' < \beta.$$

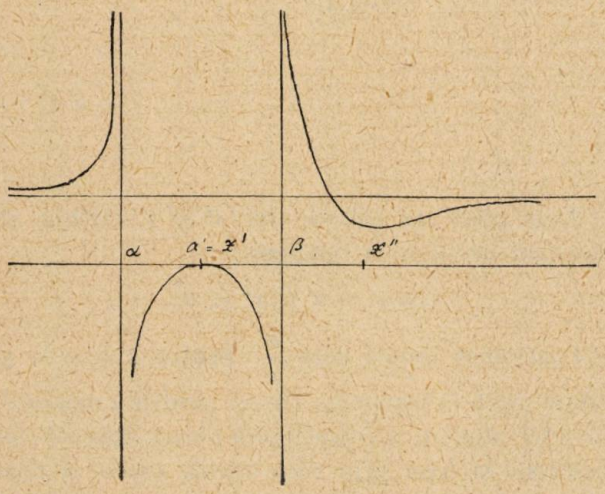
Funcțiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x = -\infty$ descrește până la minimum pentru $x = x'$ și apoi începe să crească până la $(+\infty)$ pentru $x = \alpha$.



in intervalul (α, β) funcțiunea pleacă dela $(-\infty)$ crește până la maximum zero pentru $x = \alpha' = x''$ și descrește apoi până la $(-\infty)$ pentru $x = \beta$. In intervalul $(\beta, +\infty)$ funcțiunea pleacă dela $(+\infty)$ și descrește până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$,

Când $\alpha' < \frac{\alpha+\beta}{2}$ valorile lui x' și x'' trebue să satisfacă următoarea relațiune:

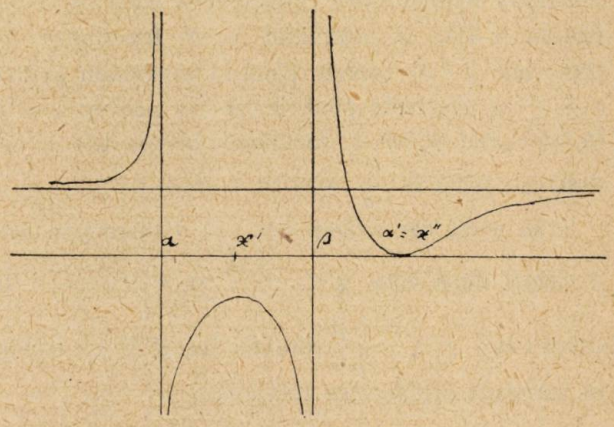
$$\alpha < \alpha = x' < \beta < x'',$$



funcțiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x = -\infty$ și crește până la $(+\infty)$ pentru $x = \alpha$. In intervalul (α, β), funcțiunea pleacă dela $(-\infty)$ și crește până la maximum zero pentru $x = \alpha' = x'$ și descrește până la $(-\infty)$ pentru $x = \beta$.

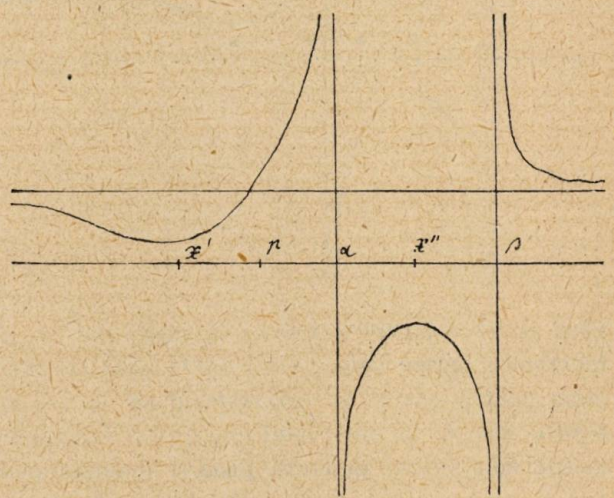
3) $\alpha' < \beta < \alpha'$. Valorile lui x' și x'' trebue să satisfacă următoarele relațiuni:

$$\alpha < x' < \beta < \alpha' = x''.$$



Funcțiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x = -\infty$ și crește până la $(+\infty)$ pentru $x = \alpha$. In intervalul (α, β) funcțiunea pleacă dela $(-\infty)$ crește până la maximum pentru $x = x'$ și descrește până la $(-\infty)$ pentru $x = \beta$. In intervalul $(\beta, -\infty)$ funcțiunea pleacă dela dela $(+\infty)$ descrește până la minimum zero pentru $x = x'' = \alpha'$ și apoi creste până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = \beta$,

c) In cazul acesta rădăcinile α' și β' sunt imaginare și sunt de forma: $p' + iq'$ și $p' - iq'$. Vom distinge și acum 3 cazuri, după cum vom avea: 1) $p' < \alpha < \beta$, 2) $\alpha < p < \beta$, 3) $\alpha < \beta < p$.



1) In acest caz valorile lui x' și x'' trebue să satisfacă următoarea relațiune:

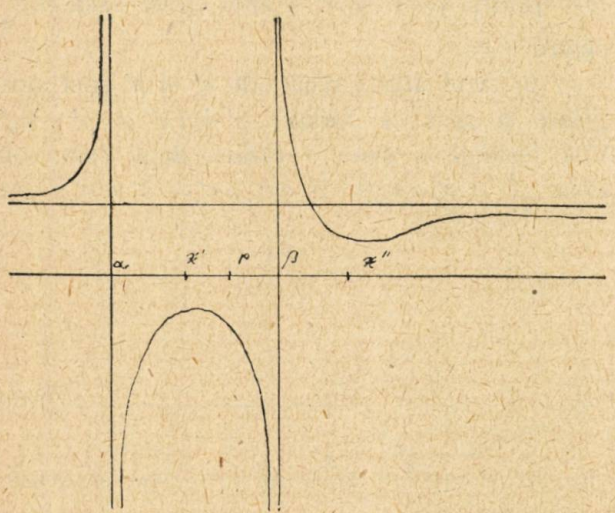
$$x' < p < \alpha < x'' < \beta.$$

Funcţiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ descreşte până la minimum pentru $x = x'$ creşte apoi până la $(+\infty)$ pentru $x = \alpha$. In intervalul (α, β) funcţiunea începe dela $(-\infty)$ creşte până la maximum pentru $x = x''$ şi descreşte până la $(-\infty)$ pentru $x = \beta$. In intervalul $(\beta, +\infty)$ funcţiunea începe dela $(+\infty)$ descreşte până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$.

2) In acest caz având $\alpha < p < \beta$ distingem alte 2 cazuri după cum $p < \frac{\alpha+\beta}{2}$ şi $p > \frac{\alpha+\beta}{2}$. In cazul când $p < \frac{\alpha+\beta}{2}$ valorile lui x' şi x'' trebue să satisfacă următoatea relaţiune:

$$x' < \alpha < p < x'' < \beta.$$

Funcţiunea variază la fel ca în cazul precedent şi are aceiaşi reprezentare grafică. Când avem $p > \frac{\alpha+\beta}{2}$ valorile lui x' şi x'' trebue să satisfacă următoarea relaţiune: $\alpha < x' < p < \beta < x''$. Funcţiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x = -\infty$ şi creşte



până la $(+\infty)$ pentru $x = \alpha$. In intervalul (α, β) funcţiunea începe dela $(-\infty)$ creşte până la maximum pentru $x = x'$ şi descreşte până la $(-\infty)$ pentru $x = \beta$. In intervalul $(\beta, +\infty)$ funcţiunea începe dela $(+\infty)$ descreşte până la minimum pentru $x = x''$ şi începe să crească până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$.

3) $\alpha < \beta < p$. In acest caz x' şi x'' trebue să satisfacă următoarea relaţiune:

$$\alpha < x' < \beta < p < x''.$$

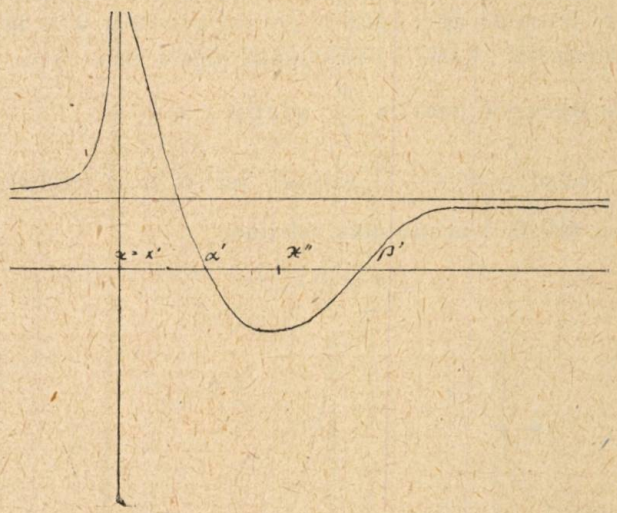
Funcţiunea variază la fel ca în cazul precedent având aceiaşi reprezentare grafică.

II) In cazul acesta avem $\alpha = \beta$ şi deci una din valorile lui x' şi x'' va coincide cu α, având un maxim sau un minim ∞, pentrucă α este un punct de discontinuitate al funcţiunii.

Distingem şi aci 3 cazuri după cum rădăcinile numărătorului a' şi β' sunt: *a)* reale şi distincte, *b)* reale şi egale, *c)* imaginare.

a) In acest caz având rădăcinile numărătorului a' şi β' reale deosebim alte 3 cazuri după cum e cuprins α faţa de a' şi β'.

1) $\alpha < a' < \beta'$, 2) $a' < \alpha < \beta'$ 3) $a' < \beta' < \alpha$.



1) In acest caz valorile lui x' şi x'' trebue să satisfacă următoarea relaţiune:

$$\alpha = x' < a' < x'' < \beta'.$$

Funcţiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x = -\infty$ şi creşte până la maximum $(+\infty)$ pentru $x = \alpha = x'$. In intervalul (α, β) fuuncţiunea pleacă dela $(+\infty)$ descreşte şi trece prin zero pentru $x = a'$ şi continuă să descreească până la minimum pentru $x = x''$, apoi creşte trecând prin zero pentru $x = \beta'$ şi continuă să crească până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$.

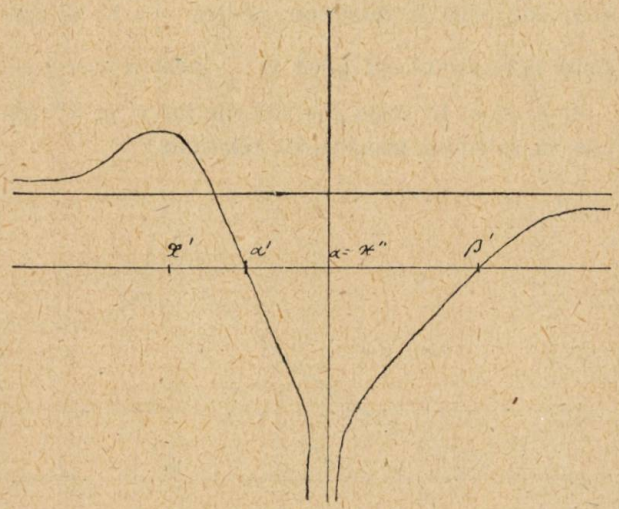
2) $a' < \alpha < \beta'$. In acest caz deosebim 2 părţi după cum $\alpha < \frac{a'+\beta'}{2}$ şi $\alpha > \frac{a'+\beta'}{2}$.

Când $\alpha < \frac{\alpha' + \beta'}{2}$ valorile lui x' și x'' trebue să satisfacă următoarea relațiune:

$$x' < \alpha' < \alpha = x'' < \beta'.$$

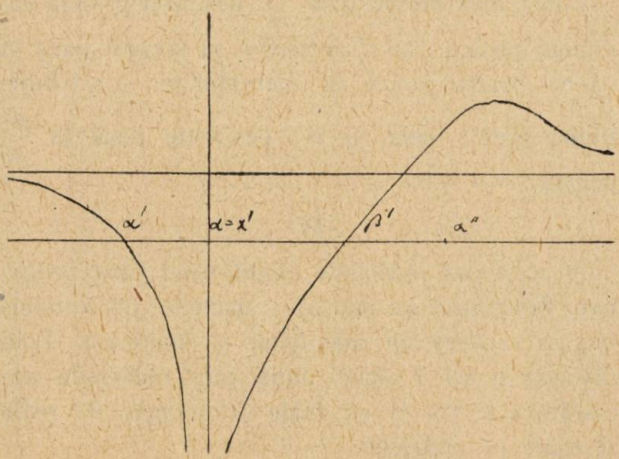
Funcțiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x = -\infty$ crește până la maximum pentru $x = x'$ și descrește trecând prin zero pentru $x = \alpha'$, continuă să descrească până la minimum $(-\infty)$ pentru $x = \alpha = x'$.

In intervalul $(\alpha, +\infty)$ funcțiunea pleacă dela $(-\infty)$ crește și trece prin zero pentru $x = \beta'$ și continuă să crească până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$.



Când $\alpha > \frac{\alpha' + \beta'}{2}$, atunci valorile lui x trebue să satisfacă următoarea relațiune:

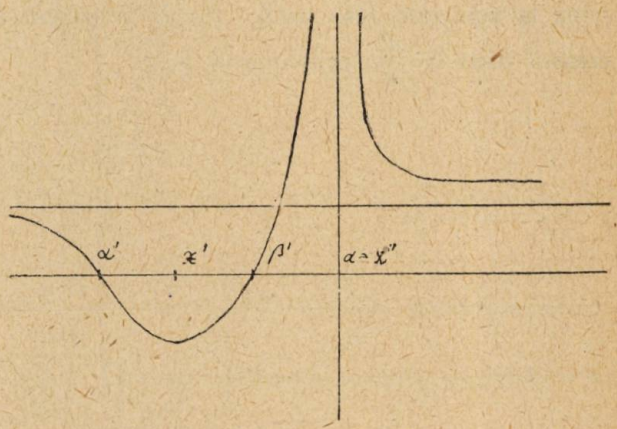
$$\alpha' < \alpha = x' < \beta' < x''.$$



Funcțiunea pleacă dela $\frac{a'}{a}$ descrește trecând prin zero pentru α', continuă să descrească până la minimum $(-\infty)$ pentru $x = \alpha$. In intervalul $(\alpha, +\infty)$ funcțiunea pleacă dela $(-\infty)$ crește și trece prin zero pentru $x = \beta'$ continuă să crească până la maximum pentru $x = x''$ și descrește până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$.

3) $\alpha' < \beta' < \alpha$. In acest caz valorile lui x' și x'' trebue să satisfacă următoarea relațiune:

$$\alpha' < x' < \beta' < \alpha = x''.$$

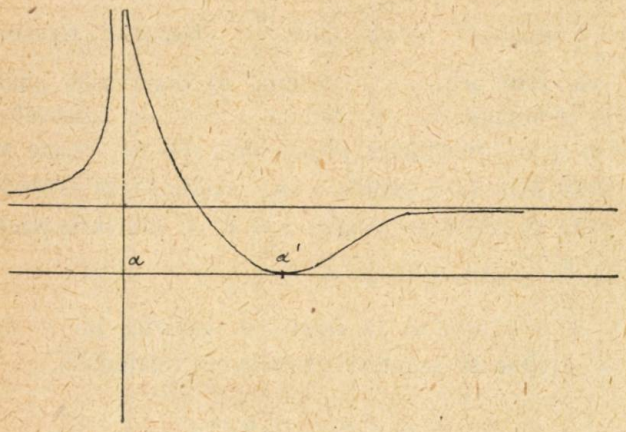


Funcțiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x = -\infty$ descrește trecând prin zero pentru $x = \alpha'$ și descrește înainte până la minimum pentru $x = x'$, începe să crească trecând prin zero pentru $x = \beta'$ și continuă să crească până la maximum $x = +\infty$ pentru $x = \alpha$. In intervalul $(\alpha, +\infty)$ funcțiunea pleacă dela $(+\infty)$ și descrește până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$.

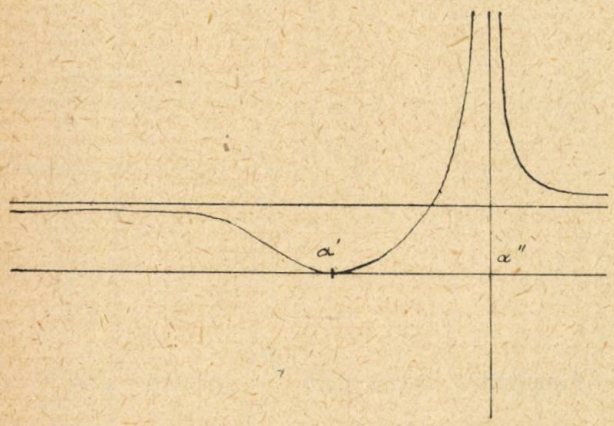
b) In cazul acesta atât numărătorul cât și numitorul având rădăcini duble însemnează că funcțiunea este un patrat perfect și va fi de aceiași parte a axei x^{lor} și vom avea maximum și minimum, unul egal cu zero și cellalt cu ∞.

Aci distingem 2 cazuri după cum 1) $\alpha < \alpha'$ și 2) $\alpha > \alpha'$.

1) $\alpha < \alpha'$. In acest caz funcțiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ merge până la maximum $(+\infty)$. In intervalul



$(\alpha, +\infty)$ funcțiunea pleacă dela $(+\infty)$ merge până la minimum zero pentru $x = \alpha'$ și începe să crească până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$.



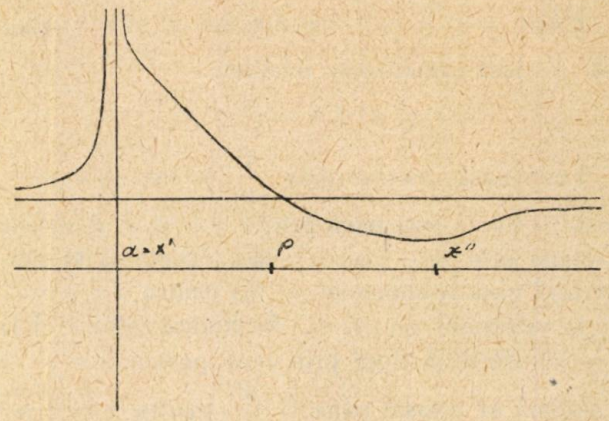
2) $\alpha' < \alpha$. In acest caz funcțiunea pleacă dela $\frac{a'}{a}$ descrește până la minimum zero pentru $x = \alpha'$ și crește apoi până la maximum $(+\infty)$ pentru $x = \alpha$. In intervalul $(\alpha, +\infty)$ funcțiunea pleacă dela $(+\infty)$ și descrește până la $\frac{a'}{a}$.

c) In acest caz rădăcinile numărătorului sunt imaginare, $\alpha' = p' + iq'$ și $\beta' = p' - iq'$. Vom avea un maxim sau minim egal cu ∞ corespunzător lui α. Vom distinge și aci 2 cazuri după cum vom avea 1) $\alpha < p'$ și 2) $p' < \alpha$.

1) $\alpha < p'$. In acest caz valorile lui x' și x'' trebue să satisfacă următoarea relațiune:

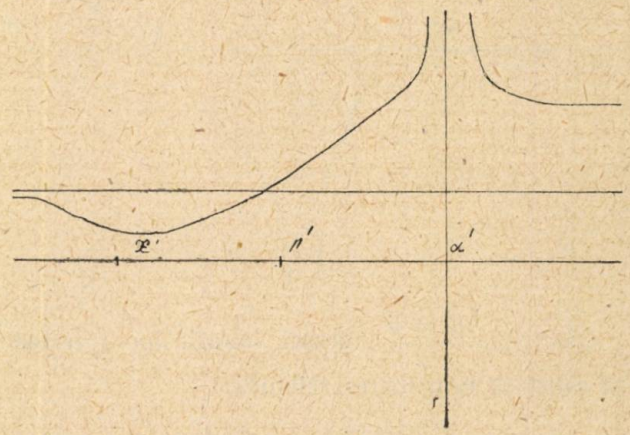
$$\alpha = x' < p' < x''.$$

Funcțiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x = -\infty$ și crește până la maximum ∞ pentru $x = \alpha$. In intervalul $(\alpha, +\infty)$ funcțiunea începe dela $(+\infty)$ și descrește până la minimum pentru $x = x''$ și continuă apoi să crească până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$.



2) $p' < \alpha$. In acest caz valorile lui x' și x'' trebue să satisfacă următoarea relațiune:

$$x' < p' < \alpha = x''.$$



Funcțiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ descrește până la minimum pentru $x = x'$ și începe să crească până la $(+\infty)$ pentru $x = \alpha$. In intervalul $(\alpha, +\infty)$ funcțiunea pleacă dela $(+\infty)$ descrește până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x = +\infty$.

IV

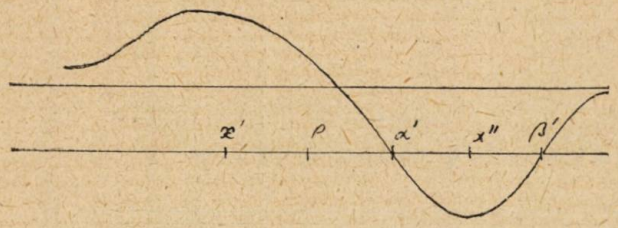
In acest caz rădăcinile numitorului fiind imaginare funcțiunea nu mai are puncte de discontinuitate și va avea un maximum și minimum. Vom distinge și aci 3 cazuri după cum rădăcinile numărătorului vor fi *a)* reale și distincte *b)* reale și egale *c)* imaginare.

a) Când rădăcinile numărătorului sunt reale şi distincte vom deosebi 3 cazuri după cum vom avea :

1) $p<\alpha'<\beta'$, 2) $\alpha'<p<\beta'$, 3) $\alpha'<\beta'<p$.

1) In cazul când $p<\alpha'<\beta$ valorile lui x' şi şi x'' trebue să satisfacă următoarea relaţiune :

$$x'<p<\alpha'<x''<\beta',$$



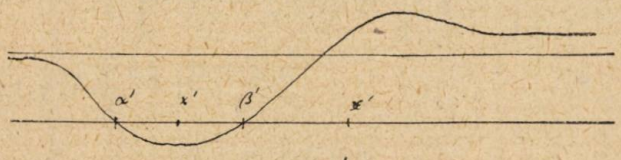
Funcţiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ creşte până la maximum pentru $x=x'$, descreşte şi trece prin zero pentru $x=\alpha'$ şi continuă să descrească până la minimum pentru $x=x''$ şi începe de aci să crească trecând prin zero pentru $x=\beta'$ şi continuă să crească până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x=+\infty$.

2) $\alpha'<p<\beta'$. Vom distinge şi aci 2 cazuri după cum $p<\frac{\alpha'+\beta'}{2}$ şi $p>\frac{\alpha'+\beta'}{2}$. Când $p<\frac{\alpha'+\beta'}{2}$ valorile lui x' şi x'' trebue să satisfacă următoarea relaţiune :

$$x'<\alpha'<p<x''<\beta'.$$

Funcţiunea variază la fel ca în cazul precedent şi având aceiaşi reprezentare grafică.

Când $p>\frac{\alpha'+\beta'}{2}$ valorile lui x' şi x'' trebue să satisfacă următoarea inegalitate : $\alpha'<x'<\beta'<x''$.



Funcţiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x=-\infty$ descreşte şi trece prin zero pentru $x=\alpha'$, continuă să descrească până la minimum pentru $x=x'$, începe să crească trecând prin zero pentru $x=\beta'$, continuă să crească până la maximum pentru $x=x''$ şi apoi descreşte până la $\frac{a'}{a}$ pzntru $x=+\infty$.

3) $\alpha'<\beta'<p$. In acest caz valorile lui x' şi x'' trebue să satisfacă următoarea relaţiune :

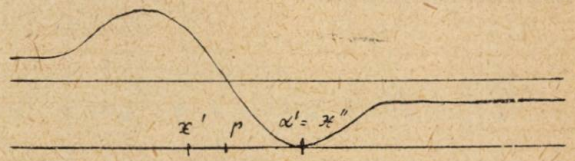
$$\alpha'<x'<\beta'<x''.$$

Funcţiunea variază la fel ca în cazul precedent având aceiaşi reprezentare grafică.

b) $\alpha'=\beta'$. Rădăcinile numărătorului fiind egale funcţiunea are maxim şi minim şi unul din ele este egal cu zero pentru $x=\alpha'=\beta'$. Distingem şi aci 2 cazuri după cum avem 1) $p<\alpha'$ 2) $\alpha'<p$.

1) $p<\alpha'$. In acest caz valorile lui x' şi x'' trebue să satisfacă următoarea relaţiune :

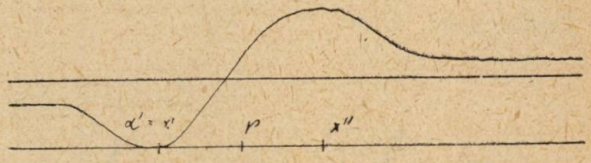
$$x'<p<\alpha'=x''.$$



Funcţiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x=-\infty$ creşte până la maximnm pentru $x=x'$, descreşte apoi până la minimum zero pentru $x=\alpha'$, începe să crească apoi până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x=+\infty$.

2) $\alpha'<p$. In acest cas valorile lui x' şi x'' trebue să satisfacă următoarea relaţiune :

$$\alpha'=x'<p<x''.$$



Funcţiunea începe dela $\frac{a'}{a}$ pentru $x=-\infty$ descreşte până la minimum zero pentru $x=\alpha''=x'$ creşte apoi până la maximum pentru $x=x''$ şi descreşte apoi până la $\frac{a'}{a}$ pentru $x=+\infty$.

c) In acest caz atât rădăcinile numărătorului cât şi numitorului fiind imaginare, valorile lui x' şi x'' vor satisface totdeauna următoarele relaţiuni :

$$x'<p<p'<x'' \quad \text{şi}$$
$$x'<p'<p<x''.$$

In cazul când $ba'-ab'>0$ vom avea maximum pentru x' şi minimum pentru x'', iar când $ba'-ab'<0$ vom avea minimum pentru x' şi maximum pentru x''.

In toate discuţiile făcute până aci, am considerat pe $\frac{a'}{a}>0$, în cazul când $\frac{a'}{a}<0$ curbele reprezentative vor fi tot cele găsite dar inversate, anume, partea d'asupra axei x^{lor} va fi dedesupt şi cea dedesupt va fi d'asupra.

NOTE MATEMATICE

1. — *Generalizarea exercițiului 72 din anul XXX al G. M. Dându-se ecuația:*

$$x^2+px+q=0,$$

cu rădăcinile x_1, x_2, *să se formeze ecuația care admite ca rădăcini:*

$$\sqrt[2^i]{x_1},\ \sqrt[2^i]{x_2}$$

unde i *poate lua valorile:* $i=1, 2, 3, \ldots n.$

Avem:

$$\sqrt[2^i]{x_1}\cdot\sqrt[2^i]{x_2}=\sqrt[2^i]{x_1x_2}=\sqrt[2^i]{q},$$

iar:

$$\sqrt[2^i]{x_1}+\sqrt[2^i]{x_2}+\sqrt{2\sqrt[2^i]{x_1x_2}+\sqrt[2^{i-1}]{x_2}+\sqrt[2^{i-1}]{x_2}}=\sqrt{2\sqrt[2^i]{x_1x_2}+\sqrt{2\sqrt[2^{i-1}]{x_1x_2}+\sqrt[2^{i-2}]{2_1}+\sqrt[2^{i-2}]{x_2}}}=$$

$$\sqrt{2\sqrt[2^i]{x_1x_2}+\sqrt{2\sqrt[2^{i-1}]{x_1x_2}+\sqrt{2\sqrt[2^{i-1}]{x_1x_2}+\ldots+\sqrt{2\sqrt[2^3]{x_1x_2}+\sqrt{2\sqrt[2^2]{x_1x_2}+\sqrt{2\sqrt{x_1x_2}+x_1+x_2}}}}}}}=$$

$$\sqrt{2\sqrt[2^i]{q}+\sqrt{2\sqrt[2^{i-1}]{q}+\sqrt{2\sqrt[2^{i-2}]{q}+\ldots+\sqrt{2\sqrt[2^3]{q}+\sqrt{2\sqrt[2^2]{q}+\sqrt{2\sqrt{q}-p}}}}}},$$

unde numărul radicalelor suprapuse este i.

Deci ecuația va fi:

$$y^2-y\sqrt{2\sqrt[2^i]{q}+\sqrt{2\sqrt[2^{i-1}]{q}+\sqrt{2\sqrt[2^{i-2}]{q}+\ldots+\sqrt{2\sqrt[2^3]{q}+\sqrt{2\sqrt[2^2]{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-p}}}}}}+\sqrt[2^i]{q}=0.$$

Pentru $i=1$ avem exercițiul propus.

IANCULESCU OCTVIAN

2. — *Suma ghiulelelor în formă de piramidă cu baza triunghiulară.* In nota matematică 12, din R. M. T., anul VI, d-l *C. Teodorescu* sumează progresiunea aritmetică cu ajutorul unei diagrame. Voi folosi aceiași diagramă. Considerăm o piramidă de ghiulele cu baza patrată cu latura de n ghiulele. Dacă în fiecare rând introduc atâtea ghiulele câte are latura, obțin în total două piramide triunghiulare de ghiulele. In total am introdus $\frac{n(n+1)}{2}$ ghiulele. Suma ghiulelelor așezate în piramidă cu baza patrată este:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Suma căutată este atunci:

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]=$$

$$\frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)$$

$$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

ION Z. PANTU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXII, No. 6, Februarie 1927, Formulele lui *Frenet*, de *Gh. Em. Filipescu*. Sur les points isosegmentaires, de *N. Agronomof*. Patrulater ortodiagonale inscriptibile relative unui triunghiu și un cerc remarcabil, de *N. Blaha*. Raportul comisiunei pentru acor-

darea premiului de matematici aplicate la ştiinţele militare, în intervalul 1 Septembrie 1925 — 31 August 1926, de Colonel *G. Protopopescu* şi *G. Borneanu*.

2. *Revista de Ciencias*, anul XXIX, Octombrie-Decembrie 1926. Los fundamentos termodinamicos de la mecánica quimica de, Dr. *José M. Plans*.

3. *Curierul Matematic*, (litografia), vol. III, No. 1, Martie 1917,. Aplicaţiunile unei teoreme a lui Carnot, de *N. Botea*.

4. *Dare de seamă asupra Societăţii ştiinţifice a elevilor liceului Moise Nicoară* din *Arad*, din anii 1921 — 25, redactat de *Valeriu Novacu*.

In această broşură îngrijit litografiată, în 64 pagini, se oglindeşte o parte din activitatea elevilor dela liceul din *Arad*, constituiţi în societate matematică încă din 1921. Broşura este interesantă pentru articolele în număr de 11. ce cuprinde, datorită d-lui *Tiberiu Popovici* şi pentru problemele rezolvate ce conţine, foarte instructive, de aceia o recomandăm cu plăcere corespondenţilor noştri, Costul 40; adresa: *Valeriu Novacu*, str. *Ep. Radu* 26, *Arad*.

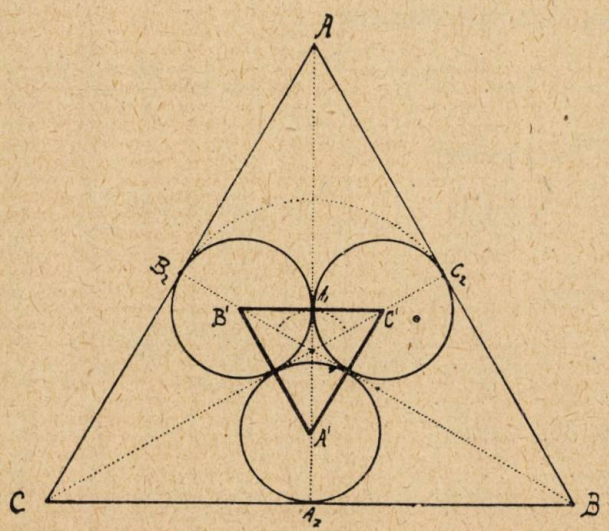
PROBLEME REZOLVATE

565. — *Bisectoarele triunghiului echilateral* A B C *se întâlnesc în punctul* O.

1°. *Să se demonstreze că centrele cercurilor înscrise triunghiurilor* BOC, AOC *şi* AOB *sunt vârfurile unui triunghiu echilateral*, A′ B′ C′.

2°. *Să se calculeze suprafaţa triunghiului echilateral* A′ B′ C′, *cunoscând o latură a triunghiului dat* A B C.

V. ALACI



1°. Trîunghiurlle A O B, B O C şi A O C fiind egale şi cercurile înscrise în ele, A′, B′, C′ sunt egale, deci:

$$A'A_2 = B'B_2 = C'C_2. \tag{1}$$

De altă parte, înălţimele triunghiului dat ABC, fiind egale — ele fiind şi mediane —, rezultă:

$$OA_2 = OB_2 = OC_2 = \frac{1}{3}AA_2. \tag{2}$$

Din (2) scăzând pe (1), găsim:

$$OA' = OB' = OC'.$$

Fiindcă:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB},$$

rezultă că:

$$A'B' \parallel AB,$$

analog $B'C' \parallel BC$, $A'C' \parallel AC$ şi deci triunghiul A′ B′ C′ este asemenea cu A B C, este deci echilateral.

2°. Observăm, că:

$$B'C' = 2r,$$

r fiind raza unuia din cercurile înscrise A′, B′, C′ şi fie $AB = a$.

Ştim că:

$$r = \frac{\text{supr. (COB)}}{\frac{a}{2} + \overline{OB}} = \frac{2\ \text{supr. (ABC)}}{3\,(a + 2\,OB)}.$$

Dar:

$$\text{supr. (ABC)} = \frac{a}{2}\cdot\overline{BB_1} = \frac{a}{2}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Apoi:

$$OB = \frac{2}{3}\overline{BB_1} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Deci:

$$B'C' = 2r = \frac{a^2\sqrt{3}}{3\left(a + \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}$$

Cum suprafaţa unui triunghiu echilateral este egală cu $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, l fiind latura lui, rezultă:

$$\text{supr.}\,(A'B'C') = \frac{3a^2}{21+12\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4(7+4\sqrt{3})} = \frac{a^2(7\sqrt{3}-12)}{4}.$$

Soluții bune date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Atanasiu M. C-tin* (Bolgrad). *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Both Ioan* Gherla), *Câlniceanu Gh.* lic. Timișoara), *Dănciulescu Gh. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dumitrescu Eugen* (lic. Buzău), *Franțiu Ioan* (Șc. Polit,. Timișoara), *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Lepădatu I. Miclea* (Gănești), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pascariu Alexe* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu N. Corneliu* (Caracal), *Popescu N. Ion* (student, Cluj), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Triculescu Ioan* (lic. Buzești, Craiova), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student) și *Vlădea Ioan* (Șc. Pollt., Timișoara),

Au demonstrat numai prima parte, a doua fiind greșită. d-nii: *Antoniu V.* (lic. Cluj), *Bălășescu N. C., Carabeteanu Gh. Petru* (lic. Lazăr, București), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Cristescu S.* (lic. Șincai, București), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Demian Dorina* (Galați), *Dimitriu Ath. Ioan* (lic. Galați), *Drăgan G. Gheorghe* (absolvent, Brașov), *Dragnea Gh. Ovidiu* (lic. Roman), *Fericeanu Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Florescu Th. C-tin* (lic. Buzești, Craiova), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, București), *Georgescu S. Gheorghe* (lic. Galați), *Ionescu Felix* (Craiova), *Isăcescu C. Titi* (Șc. Milit. de Geniu), *Lupșan Nedelcu* (lic. Brașov), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara). *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iași), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Mărculescu I. Origen* (lic. Carol, Craiova), *Muster H. D-tru* (Semin. Pedag., București), *Neacșu Vasile* (lic. Brașov), *Nichita C. Aurel* (lic. Buzești, Craiova), *Patron Th. N.* (lic. Milit., Iași), *Pavelescu Mircea* (lic. Tg.-Jiu), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Steblea Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Vasilescu Bartolomeu* (București) și *Vâleanu Iustin* (lic. Tg.-Jiu).

Au trimes soluțiuni și d-nii: *Cazimir A. Iosif* (lic. Arad) și *Tomescu Valerin* (lic. Lazăr, București).

567. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\begin{cases} x^{15}+y^5=a \\ x^3y^4+x^6y^3+x^9y^2+x^{12}y=b. \end{cases}$$

IANCULESCU OCTAVIAN

Prin substituția:

$$y = tx^3, \tag{1}$$

sistemul dat devine:

$$\begin{cases} x^{15}(1+t^5)=a \\ x^{15}(t^4+t^3+t^3+t)=b. \end{cases} \tag{2}$$

Prin împărțire deducem:

$$\frac{t^5+1}{t^4+t^3+t^2+1} = \frac{t^4-t^3+t^2-t+1}{t^3+t} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore\ bt^4-(a+b)t^3+bt^2-(a+b)t+b=0 \tag{3}$$

ecuația reciprocă de gradul patru.

O putem scri, încă:

$$b\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-(a+b)\left(t+\frac{1}{t}\right)+b=0.$$

Dacă luăm:

$$t+\frac{1}{t}=u, \tag{4}$$

avem:

$$b(u^2-2)-(a+b)u+b=0,$$

sau:

$$bu^2-(a+b)u-b=0$$

$$\therefore\ u_{3,2}=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2+4b^2}}{2b}.$$

Dacă notăm:

$$\frac{a+b+\sqrt{(a+b)^2+4b^2}}{2b}=A,$$

atunci:

$$\frac{a+b-\sqrt{(a+b)^2+4b^2}}{2b}=\frac{1}{A},$$

și atunci:

$$u_1=A,\quad u_2=\frac{1}{A}.$$

Inlocuind în (4) aceste valori, găsim ecuațiile:

$$t^2-At+1=0,\quad At^2-t+A=0,$$

cu rădăcinile respectiv:

$$t_{1,2}=\frac{A\pm\sqrt{A^2-4}}{2},\quad t_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{1-4A^2}}{2A}.$$

Dacă notăm:

$$\frac{A+\sqrt{A^2-4}}{2}=\alpha,\quad \frac{1+\sqrt{1-4A^2}}{2A}=\beta,$$

atunci:

$$\frac{A-\sqrt{A^2-4}}{2}=\frac{1}{\alpha},\quad \frac{1-\sqrt{1-4A^2}}{2A}=\frac{1}{\beta},$$

și deci avem:

$$t_1=\alpha,\quad t_2=\frac{1}{\alpha},\quad t_3=\beta,\quad t_4=\frac{1}{\beta}.$$

Inlocuind pe rând aceste valori în prima din ecuațiile (2), deducem:

$$x^{15}=\frac{a}{1+\alpha^5},\quad x^{15}=\frac{a\alpha^5}{1+\alpha^5},\quad x^{15}=\frac{a}{1+\beta^5},$$

$$x^{15}=\frac{a\beta^5}{1+\beta^5}.$$

De unde deducem: ținând seamă de (1), următoarele sisteme de soluții:

$$\begin{cases} x=\sqrt[15]{\dfrac{a}{1+\alpha^5}}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{15}+i\sin\dfrac{2k\pi}{15}\right) \\ y=\alpha\sqrt[5]{\dfrac{a}{1+\alpha^5}}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{2}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}\right) \end{cases} \quad k=0.\,1.\,2,\ldots,14$$

$$\begin{cases} x=\sqrt[15]{\dfrac{a\alpha^5}{1+\alpha^5}}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{14}+i\sin\dfrac{2k\pi}{15}\right) \\ y=\dfrac{1}{\alpha}\sqrt[5]{\dfrac{a\alpha^5}{1+\alpha^5}}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}\right) \end{cases} \quad k=0,\,1,\,2,\ldots,14$$

$$\begin{cases} x=\sqrt[15]{\dfrac{a}{1+\beta^5}}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{15}+i\sin\dfrac{2k\pi}{15}\right) \\ y=\beta\sqrt[5]{\dfrac{a}{1+\beta^5}}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}\right) \end{cases} \quad k=0,\,1,\,2,\ldots,14$$

$$\begin{cases} x=\sqrt[15]{\dfrac{a\beta^5}{1+\beta^5}}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{15}+i\sin\dfrac{2k\pi}{15}\right) \\ y=\dfrac{1}{\beta}\sqrt[5]{\dfrac{a\beta^5}{1+\beta^5}}\left(\cos\dfrac{2k\beta}{5}+i\sin\dfrac{2k\beta}{5}\right), \end{cases} \quad k=0,\,1,\,2,\ldots,14$$

unde $i=\sqrt{-1}$.

Soluții paațiale date de d-nii: *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara) și *Vasiliu Gh, Gheorghe* (student).

577* — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2 2(k+1)t\cos(2k+1)t+$$

$$\cos t\sum_{k=1}^{n}\sin 2kt\sin(4k+2)t=\frac{\sin^3 2(n+1)t-\sin^3 2t}{2\sin t}$$

V. ALACI

Soluții date de d-nii: *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București) și *Novacu Valeriu* (lic. Arad).

Folosim formula cunoscută:

$$\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]=f(n+1)-f(1),$$

în care, dacă luăm:

$$f(x)=\sin^3 2xt,$$

avem:

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{n}[\sin^3 2(k+1)t-\sin^3 2kt]=\sin^3 2(n+1)t-\sin^3 2t.$$

Dar, observăm că putem scri succesiv:

$$\sin^3 2(k+1)t-\sin^3 2kt=$$

$$[\sin 2(k+1)t-\sin 2kt][\sin^2 2(k+1)t+$$

$$\sin 2kt\sin 2(k+1)t+\sin^2 2kt]=$$

$$2\sin t\cos(2k+1)t[\sin^2 2(k+1)t+$$

$$\sin 2kt(\sin 2(k+1)t+\sin 2kt)]=$$

$$2\sin t\cos(2k+1)t[\sin^2 2(k+1)t+$$

$$+2\sin 2kt\sin(2k+1)t\cos t]=$$

$$2\sin t[\sin^2 2(k+1)t\cos(2k+1)t+$$

$$\cos t\sin 2kt\sin(4k+2)t].$$

Inlocuind în (1), și împărțind apoi cu $2\sin t$, putem scri:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2 2(k+1)t\cos(2k+1)t+$$

$$\cos t\sum_{k=1}^{n}\sin 2kt\sin(4k+2)t=\frac{\sin^3 2(n+1)t-\sin^3 2t}{2\sin t}$$

care este tocmai identitatea dată.

Alte soluții date de d-nii: *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați) și *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București).

594. — *Să se stabilească relația:*

$$\left(\frac{r_a-r}{\sin^2\dfrac{A}{2}}+\frac{r_b-r}{\sin^2\dfrac{B}{2}}+\frac{r_c-r}{\sin^2\dfrac{C}{2}}\right)\times$$

$$\left(\frac{\sin^2\dfrac{A}{2}}{r_a-r}+\frac{\sin^2\dfrac{B^2}{2}}{r_b-r}+\frac{\sin^2\dfrac{C}{2}}{r_c-r}\right)=9.$$

EMIL STEFANESCU

Folosim relaţiile cunoscute:

$$r=\frac{s}{p},\quad r_a=\frac{s}{p-a},\quad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc},$$

$$s^2=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

De aci deducem:

$$\frac{r_a-r}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{\frac{s}{p-a}-\frac{s}{p}}{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\frac{abcs}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{s}$$

Analog, găsim:

$$\frac{r_b-r}{\sin^2\frac{B}{2}}=\frac{r_c-r}{\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{abc}{s}.$$

Insemnând cu E primul membru al relaţiei date. putem scri:

$$E=\left(\frac{abc}{s}+\frac{abc}{s}+\frac{abc}{s}\right)\left(\frac{s}{abc}+\frac{s}{abc}+\frac{s}{abc}\right)=$$

$$\frac{3abc}{s}\cdot\frac{3s}{abc}=9.$$

Soluţii date de d-nii: *Atanasescu V. D-tru* (Şc. Polit., Timişoara), *Avramescu Th. Ion* (lic. Carol, Craiova), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *B canu V. Ion* (Făgăraş), *Bălăşescu N. C.* (Târgovişte), *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Bratosin Radu* (lic. Braşov), *Catz Boruh* (lic. Cahul), *Câlniceanu Gh.* (lic. Timişoara), *Cernăuţi Ion* (lic. Timişoara), *Costăchescu V. C.* (lic. Milit., Iaşi), *Craiu N. Ion* (lic. Piteşti), *Crăciunescu N. Eugen* (Craiova), *Cristescu C. I.*, *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Dăscălescu Cristache* (lic. Focşani), *Dimitriu Ion* (lic. Galaţi), *Dimoviceanu M. D-tru* (Şc. Polit., Timişoara), *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Duport George* (Bucureşti), *Fericeanu Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Floareş I. Mircea* (lic. Bacău), *Gheorghiev Nicolae* (lic. Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Iacob Şt. Eugen* (Şc. Milit. de Artilerie), *Imre-Macri Ştefan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Ionescu Haralambie* (lic. Piteşti), *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova), *Iovănescu D. L.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Marinaş B. Marin* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Lepădatu Miclea* (student), *Manolescu I. N.* (Şc. Polit., Timişoara), *Mara Ştefan*, *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iaşi), *Müller C. Gheorghe* (lic. Piteşti), *Muster H. D-tru* (Semn. Pedag., Bucureşti), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nichita C. Aurel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galaţi), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Patron Th. N.* (llc. Milit., Iaşi), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Popescu St. Toma* (lic. Piteşti), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Târgovişte), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Rădulescu M.* (lic. R.-Sărat), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul. Bucureşfi), *Savin I.* (lic. Milit., Iaşi), *Sebastian Colă* (lic. Buzeşti, Craiova), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Şoimulescu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Stan C.* (lic. Roman), *Stoica Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Steblea Şt. Ştefan* (Şc. Polit, Timişoara), *Triculescu Ioan* (lic. Buzeşti, Craiova), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina), *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student), *Zăgaican Ilic* (Şc. de Conductori, Chişinău) şi *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa).

Au trimis soluţii şi d-nii: *Manoil A.* şi *Popluca Mircea* (lic. Arad).

Observare. D-l *Gheorghiu Th. Gheorghe*, a stabilit în mod analog identitatea:

$$\left[\frac{(r_a-r)^n}{\sin^{2n}\frac{A}{2}}+\frac{(r_b-r)^n}{\sin^{2n}\frac{B}{2}}+\frac{(r_c-r)^n}{\sin^{2n}\frac{C}{2}}\right]\times$$

$$\left[\frac{\sin^{2n}\frac{A}{2}}{(r_a-r)^n}+\frac{\sin^{2n}\frac{B}{2}}{(r_b-r)^n}+\frac{\sin^{2n}\frac{C}{2}}{(r_c-r)^n}\right]=9.$$

597. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases}(y+z)(x^3+y^3+z^3-3xyz)=a\\(z+x)(x^3+y^3+z^3-3xyz)=b\\(x+y)(x^3+y^3+z^3-3xyz)=c\end{cases}$$

S. SAVU.

Facem suma ultimelor două ecuaţii, din care scădem prima ecuaţie, deducem:

$$(1)\quad\begin{cases}x(x^3+y^3+z^3-3xyz)=\frac{b+c-a}{2},\ \text{analog}\\y(x^3+y^3+z^3-3xyz)=\frac{c+a-b}{2}\\z(x^3+y^3+z^3-3xyz)=\frac{a+b-c}{2}\end{cases}$$

Prin împărţire deducem:

$$\frac{y}{x}=\frac{c+a-b}{b+c-a},\quad \frac{z}{x}=\frac{a+b-c}{b+c-a},$$

de unde:

$$y=\frac{c+a-b}{b+c-a}x,\quad z=\frac{a+b-c}{b+c-a}x.$$

Inlocuind aceste valori în prima din ecuațiile (1), găsim:

$$(2)\quad x^4[(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3-3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)]=\frac{(b+c-a)^4}{2}.$$

In virtutea identității:

$$(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3-3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=4(a^3+b^3+c^3-3abc),$$

ecuația (2) se poate scri:

$$4x^4(a^3+b^3+c^3-3abc)=\frac{(b+c-a)^4}{2}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x=\dfrac{b+c-a}{\sqrt[4]{8(a^3+b^3+c^3-3abc)}}, \\ y=\dfrac{c+a-b}{\sqrt[4]{8(a^3+b^3+c^3-3abc)}} \\ z=\dfrac{a+b-c}{\sqrt[4]{8(a^3+b^3+c^3-3abc)}} \end{cases} \quad \text{analog}$$

Avem câte patru sisteme de soluții, căci rădăcina 4^a dintr'un număr, ne dă patru valori:

Soluții bune date de d-nii: *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, București), *Coldstein G. A.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București) și *Vasiliev V.* (lic. Mihai-Viteazul. București).

Generalizare dată de d-l *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București).

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (y+z)f(x,\ y,\ z)=a \\ (z+x)f(x,\ y,\ z)=b \\ (x+y)f(x,\ y,\ z)=c, \end{cases}$$

unde $f(x,\ y,\ x)$ este o funcție omogenă.

Adunând membru cu membru, ecuațiile sistemului, găsim:

$$(x+y+z)f(x,\ y,\ z)=\frac{a+b-c}{2},$$

din care scăzând pe rând fiecare din ecuațiile date, obținem:

$$\begin{cases} xf(x,\ y,\ z)=\dfrac{b+c-a}{2} \\ yf(x,\ y,\ z)=\dfrac{c+a-b}{2} \\ zf(x,\ y,\ z)=\dfrac{a+b-c}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\quad x=\frac{b+c-a}{2\alpha},\ y=\frac{c+a-b}{2\alpha},\ z=\frac{a+b-c}{2\alpha}$$

unde am pus $f(x,\ y,\ z)=\alpha$

Inlocuind valorile găsite pentru $x,\ y,\ z$ în $f(x,\ y,\ z)$ și ținând seamă că această funcțiune e omogenă, m fiind gradul de omogenitate, avem:

$$f(x,\ y,\ z)=f\left(\frac{b+c-a}{2\alpha},\ \frac{c+a-b}{2\alpha},\ \frac{a+b-c}{2\alpha}\right).$$

In virtutea teoremei lui *Euler* dela funcțiile omogene, putem scri:

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{1}{2^m\alpha^m}f(b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c)=\alpha$$

$$\therefore\quad \alpha^{m+1}=\frac{1}{2^m}f(b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c)$$

De aci putem afla valoarea lui α.

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt[m+1]{2^m}}\sqrt[m+1]{f}(b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c)\left(\cos\frac{2k\pi}{m+1}+i\sin\frac{2k\pi}{m+1}\right),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots m.$$

Deci:

$$x=\frac{b+c-a}{\sqrt[m+1]{2}\sqrt[m+1]{f}(b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c),\left(\cos\frac{2k\pi}{m+1}+i\sin\frac{2k\pi}{m+1}\right)},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,m$$

analog pentru y și z.

Pentru cazul problemei date, $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, avem:

$$x = \frac{b+c-a}{2^{\frac{1}{4}}\left[(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3-3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\right]^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}}$$

$(k = 0, 1, 2, 3)$

analog pentru y şi z.

PROBLEME PROPUSE

617. — Să se găsească un număr de trei cifre egal cu cubul cifrei unităţilor şi cu patratul răsturnatului numărului rămas la stânga sa, după suprimarea cifrei unităţilor

PAMULA ALEXANDRU.

618. — Să se arate că expresia:

$$55^{77} - 3^3 \times 154 - 1,$$

se divide cu 2916.

STELIAN D. POPESCU.

619. — Se dă un triunghiu ABC. Fie A', B', C' punctele unde înălţimele acestui triunghiu întâlnesc cercul circumscris ABC. Dreptele A'B'. A'C' întâlnesc respectiv laturile AC şi AB în M şi N. Să se arate că punctele M, N, H, sunt colineare; H fiind ortocentrul triunghiului ABC.

ŞT. MUSTA

620. — Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{a(a+2)}{(a-2b)(a-3c)(a-4d)} + \frac{2b(b+1)}{(2b-a)(2b-3c)(b-2d)} + \frac{3c(3c+2)}{(3c-a)(3c-2b)(3c-4d)} = \frac{2d(4d+2)}{(4d-a)(2d-b)(3c-4d)}$$

RUSANDA P. GHEORGHE

621. — Dacă:

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

se cere limita expresiunei:

$$E = \sqrt[3]{f(x+1)} + \sqrt[3]{f(x+2)} + \sqrt[3]{f(x+3)} - 3\sqrt[3]{f(x)}$$

pentru $x = \infty$.

GH. CONSTANTINESCU

622. — Să se demonstreze că ecuaţia:

$$x + \alpha = -\frac{1}{x} - \sum_{p=1}^{n} \frac{a_p}{x^p},$$

în care $|\alpha| < 2$, iar coeficienţii a_p sunt pozitivi, nu poate avea rădăcini pozitive.

ERNEST ABASON

623. — Se dă triunghiul echilateral ABC. Se duc înălţimele lui, care se întâlnesc în H. Pe segmentele AH, BH. CH, se iau respectiv punctele A', B', C', astfel ca:

$$A'A = \frac{AH}{2}, \quad B'B = \frac{BH}{3}, \quad C'H = \frac{2CH}{3}.$$

Se cere să se calculeze aria triunghiului A'B'C' în funcţie de a latura triunghiului ABC.

V. ALACI

624. — Intre unghiurile unui triunghiu avem relaţia:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin A & \operatorname{cotg}\frac{A}{2} \\ 1 & \sin B & \operatorname{cotg}\frac{B}{2} \\ 1 & \sin C & \operatorname{cotg}\frac{C}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

RADULESCU C. MIHAIL

INFORMATIUNI

Primim spre publicare următoarele:

Universitatea din *Nancy* acordă burse românilor care doresc să-şi completeze studiile în Franţa.

Facultăţi de drept, medicină, ştiinţe, litere şi farmacie, institute technice în specialităţile chimice, electrotechnică, agricolă şi colonială, geologie aplicată, comerţ, dentistică serotherapie, pot fi urmate de studenţi. Şcoala de metalurgie şi mine, şcoala de berărie, şcoala de silvicultură, conservator, belearte, şi alte şcoli se găsesc în localitate. Pentru studenţii streini, cursuri speciale de limba franceză, cu prepararea pentru examenele Alianţei Franceze. Diplome de stat se acordă în urma examenelor.

Nancy este un centru industrial important, precum şi un centru artistic şi cultural.

Studenţii sunt ajutaţi prin diferite societăţi, un comitet de patronaj îngrijeşte de relaţiile în familiile franceze, restaurant universitar, societate sportivă, cămin pentru studente sunt puse la dispoziţie.

Pentru orice informaţiuni a se adresa la *Office de Renseigenements de l'Université 13, Place Carnot, Nancy.*

Legându-se colecţia R. M. T., anul V, în volum, şi rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

De asemenea se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II, III, IV, V cu preţul de lei 80 volumul şi se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzători e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată şi să iscălească.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing.-Şef C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VII. 15 APRILIE 1927 No. 2

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. PETRE SERGESCU. ASUPRA UNOR INSUMARI.
2. NOTE MATEMATICE, 3, 4.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 551, 598, 599, 600, 610.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.
Anul VI, broşat, 80 lei.

ANUL VII — NO. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1927

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

ASUPRA UNOR INSUMARI

de PETRE SERGESCU

O metodă foarte generală (cunoscută) pentru însumarea unei serii este de a descompune termenul general u_n într'o diferență a valorilor unei aceleiaș funcțiuni pentru argumentele n și $n+1$, adică astfel ca:

$$u_n = f(n) - f(n+1)$$
$$s_n = f(0) - f(n+1)$$
$$S = f(0) - \lim_{n\to\infty} f(n).$$

Vreau să explicitez în cele ce urmează câteva cazuri particulare, pentru a arăta mai de aproape cum se pot construi câteva clase de sume, ușor de calculat. Cazurile pe care le vom considera sunt când u_n e o fracție rațională, un log., un arc tg sau un arc sin.

1) Dacă u_n e o fracție rațională de n convenabil aleasă, în general reușește pentru sumare *descompunerea lui u_n în fracții simple.* Se constată dacă fracțiile simple astfel obținute se reduc sau nu în însumare. Suma are ca limită primele fracțiuni care nu s'au redus, căci când n tinde către ∞, toate fracțiile simple tind către 0 și $\lim f(n) = 0$. Exemple de însumări de asemenea natură se pot construi în număr nesfârșit. E deajuns de a însemna prin $\varphi(n)$ o seamă de fracții simple, și a pune:

$$u_n = \varphi(n) - \varphi(n+1).$$

Atunci:

$$(1) \qquad \sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \big(\varphi(n) - \varphi(n+1)\big) = \varphi.$$

Exemplu: Fie de calculat:

$$S = \sum_1^\infty \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n + 2}{n(n+1)(n^2+1)(n^2+2n+2)}.$$

Descompunând pe u_n în fracții simple, avem:

$$S = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1}\right)$$

$$\varphi(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2+1}$$

$$S = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right) + \ldots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

căci toate celelalte paranteze se reduc succesiv una cu cea următoare și când $n \to \infty$, paranteza tinde către zero.

2) Să calculăm suma:

$$S = \sum_1^\infty \log A(n).$$

Incercăm dacă putem pune pe $\log A(n)$ sub forma diferenței $\log \varphi(n) - \log \varphi(n+1)$. Pentru aceasta trebue:

$$A(n) = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}.$$

Când $\varphi(n)$ e o expresie oarecare, care tinde către o limită finită și diferită de zero când n tinde către ∞, obținem o serie a cărei sumă este: $\log \varphi(0) - \log \lim_{n\to\infty} \varphi(n)$. Invers, dacă $A(n)$ e dat — și convenabil ales — cum se poate găsi $\varphi(n)$? Avem:

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = A(n) \quad \therefore \quad \frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n)} = A(n-1).$$

Inmulțind între ele aceste relații, în membrul întâi se simplifică $\varphi(n)$. Fie atunci $K(n)$ factorul cu care se simplifică produsul $A(n)\,A(n-1)$. Rezultă că $\varphi(n)$ e un divizor al lui $K(n)$, căci mem-

brul I se simplifică cu $\varphi(n)$ și în plus, eventual, cu divizorii comuni ai lui $\varphi(n-1)$ și $\varphi(n+1)$. Deci se poate încerca:

$$\varphi(n) = M(n)\,K(n)$$

unde M nu e încă cunoscut, dar K e cunoscut. Relația fundamentală:

$$\varphi(n) = A(n)\,\varphi(n+1),$$

conduce la o relație analoagă *dar mai simplă*, între $M(n+1)$ și $M(n)$. După câteva operații analoage, relația devenind tot mai simplă, se obține o soluție precisă, cu ajutorul căreia se reconstitue, din aproape în aproape, expresia pe care o căutăm $\varphi(n)$.

Exemplu. Fie:

$$A(n) = \frac{(n^2+2n+3)(n^2+5n+1)}{(n^2+2)(n^2+7n+7)}.$$

Atunci:

$$A(n-1) = \frac{(n^2+2)(n^2+3n-3)}{(n^2-2n+3)(n^2+5n+1)}.$$

Deci:

$$k(n) = \frac{n^2+5n+1}{n^2+2}$$

(sau putem lua pentru $K(n)$ și expresia inversă, care de fapt conduce la aceiaș soluție finală). Să punem:

$$\varphi(n) = \frac{n^2+5n+1}{n^2+2}\,M(n);$$

$$\varphi(n+1) = \frac{n^2+7n+7}{n^2+2n+3}\,M(n+1),$$

de unde, înlocuind în $\varphi(n) = A(n)\,\varphi(n+1)$, se obține:

$$M(n)\,M(n+1) = 1 \quad \therefore \quad M = 1.$$

Prin urmare:

$$\varphi(n) = \frac{n^2+5n+1}{n^2+2}$$

$$\sum_0^\infty \log \frac{(n^2+2n+3)(n^2+5n+1)}{(n^2+2)(n^2+7n+7)} =$$

$$\log \frac{1}{2} - \log 1 = -\log 2,$$

al doilea exemplu (în care $M(n)$ nu e o constantă).

Fie:

$$A(n) = \frac{(n^2-1)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)(n^2-2n)}$$

$$A(n-1) = \frac{(n^2-2n)(n^2-2n+2)}{(n^2+1)(n-4n+3)}$$

$$K(n) = \frac{n^2+1}{n^2-2n}(n-1).$$

Punând:

$$\varphi(n) = \frac{n^2+1}{n^2-2n}(n-1)\,M(n)$$

$$\therefore \quad \varphi(n+1) = \frac{n^2+2n+2}{n^2-1}\,n\,M(n+1)$$

găsim:

$$A(n) = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{(n^2+1)(n-1)}{(n^2-2n)(n^2+2n+2)} \cdot \frac{(n-1)M(n)}{n\,M(n+1)}$$

De unde, egalând primul și ultimul membru:

$$(n-1)\,M(n) = n\,M(n+1)$$

$$M(n) = \frac{1}{n-1}$$

și, ca atare:

$$\varphi(n) = \frac{n^2+1}{n^2-2n}$$

$$\sum_3^\infty \log \frac{(n^2-1)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)(n^2-2n)} =$$

$$\log \varphi(3) - \log \lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \log \frac{10}{3}$$

etc.

3) Să considerăm acum suma:

$$S = \sum \operatorname{arc\,tg} \frac{A(n)}{B(n)}.$$

Incercăm să punem $\operatorname{arc\,tg} \frac{A}{B}$ sub forma:

$$k = \operatorname{arc\,tg}\varphi(n) - \operatorname{arc\,tg}\varphi(n+1)$$

$$\operatorname{tg} k = \frac{\varphi(n) - \varphi(n+1)}{1+\varphi(n)\,\varphi(n+1)}.$$

Suntem astfel conduși să rezolvăm ecuația:

$$\frac{\varphi(n) - \varphi(n+1)}{1+\varphi(n)\,\varphi(n+1)} = \frac{A(n)}{B(n)}.$$

Pentru asta, vom pune:

$$\varphi(n) - \varphi(n+1) = S(n)\,A(n)$$
$$1 + \varphi(n)\,\varphi(n+1) = S(n)\,B(n)$$

şi eliminând pe $\varphi(n+1)$:

$$\varphi^2(n) - S(n)\,A(n)\,\varphi(n) + 1 - S(n)\,B(n) = 0$$

$$\varphi(n) = \frac{S(n)\,A(n) \pm \sqrt{S^2(n)\,A^2(n) + 4\,S(n)\,B(n) - 4}}{2}$$

$S(n)$ e arbitrar. In general în exerciţiile uzuale, când exerciţiul e compus în mod convenabil, se poate găsi o expresie pentru $S(n)$ astfel ca $\varphi(n)$ să fie raţional. Suma seriei este:

$$S = \operatorname{arc\,tg}\,\varphi(0) - \operatorname{arc\,tg} \lim_{n\to\infty} \varphi(n).$$

Exemplu. Să se calculeze suma seriei:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{2n+1}{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 3}$$

arc tg. fiind cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ şi $+\frac{\pi}{2}$. Aci:

$$A(n) = 2n + 1$$
$$B(n) = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 3$$

$$\varphi(n) = \frac{S(n)\,(2n+1) \pm \sqrt{S^2(n)\,(2n+1)^2 + 4\,S(n)\,(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 3) - 4}}{2}.$$

Luând $S(n) = 1$, câtimea de sub radical devine:

$$4n^4 + 8n^3 + 16n^2 + 12n + 9 = (2n^2 + 2n + 3)^2.$$

Deci putem pune:

$$\varphi(n) = \frac{2n + 1 \pm (2n^2 + 2n + 3)}{2}.$$

De aci scoatem *două* valori pentru $\varphi(n)$. Dar *nu* amândouă sunt răspunsuri acceptabile pentru problema noastră. Căci, trebue să alegem drept $\varphi(n)$ expresia aceia (d. p. φ_1) astfel ca cealălaltă (φ_2) să fie $-\varphi_1(n+1)$, în baza eliminărei făcute care ne-a condus la ecuaţia în $\varphi(n)$. Cu aceste observări se deduce că în cazul nostru $\varphi(n)$ corespunde semnului —, adică avem:

$$\varphi(n) = -(n^2 + 1)$$
$$\varphi(n+1) = n^2 + 2n + 2.$$

Ca atare:

$$S = \sum_{0}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{2n+1}{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 3} =$$

$$\operatorname{arc\,tg}(-1) - \operatorname{arc\,tg} \lim \left(-(n^2 + 1)\right) =$$

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Observare. E evident că acelaş rezultat se obţine şi dacă pornim dela altă expresie a lui $S(n)$. De pildă, în problema precedentă să punem:

$$S(n) = \frac{1}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)}.$$

Câtimea de sub radical devine:

$$\frac{(2n^2 + 2n + 3)^2}{(n^2 + 1)^2 (n^2 + 2n + 2)^2}$$

şi deci $\varphi(n)$ e dat de una din expresiile:

$$\frac{2n + 1 \pm (2n^2 + 2n + 3)}{2(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)}.$$

In baza semnificărei lui $\varphi(n)$ se obţine:

$$\varphi(n) = \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$S = \operatorname{arc\,tg}\,\varphi(0) - \operatorname{arc\,tg} \lim_{n\to\infty} \varphi(n) =$$

$$\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Notă. Calculele s'ar putea efectua dispunând-se şi altfel. Anume:

$$\varphi(n) - \varphi(n+1) = \frac{S(n)}{B(n)} \quad \therefore \quad 1 + \varphi(n)\,\varphi(n+1) = \frac{S(n)}{A(n)}$$

Dar această combinaţie nu conduce la rezultate noui. Ea revine la a înlocui $S(n)$ prin $S(n)/A(n)\,B(n)$ în calculele precedente.

4) Trecem acum la cazul unei sume de arc sin. Ne mărginim la cazul când argumentul e o fracţie raţională. Fie de calculat suma:

$$S = \sum \operatorname{arc\,sin} \frac{A(n)}{B(n)}.$$

Să însemnăm:

$$k(n) = \operatorname{arc\,sin} \frac{A(n)}{B(n)}.$$

Căutăm să obţinem o descompunere de forma:

$$k(n) = \arcsin \varphi(n) - \arcsin \varphi(n+1)$$

$$\frac{A(n)}{B(n)} = \varphi(n)\sqrt{1-\varphi^2(n+1)} - \varphi(n+1)\sqrt{1-\varphi^2(n)}.$$

Presupunem că soluţia $\varphi(n)$ e o fracţie raţională $\frac{P(n)}{Q(n)}$. Membrul al doilea are ca numitor $Q(n)\,Q(n+1)$ şi trebue să avem:

$$Q(n)\,Q(n+1) = S(n)\,B(n)$$

unde putem determina totdeauna un $S(n)$ aşa ca membrul al doilea să fie un produs al expresiei unei aceleiaş funcţiuni pentru argumentele n şi $(n+1)$. In cel mai rău caz putem lua $S(n) = B(n+1)$. Aşa dar, relaţia precedentă ne permite să determinăm pe $Q(n)$. Suntem astfel conduşi la ecuaţia funcţională:

$$S(n)\,A(n) = M(n) = P(n)\sqrt{Q^2(n+1) - P^2(n+1)} - P(n+1)\sqrt{Q^2(n) - P^2(n)}$$

unde necunoscuta e funcţiunea $P(n)$.

$M(n)$ fiind un polinom se deduce de aci că $\sqrt{Q^2(n) - P^2(n)}$ *trebue să fie raţional.* In adevăr, ridicând la patrat egalitatea de mai sus, obţinem:

$$M^2(n) = P^2(n)\,Q^2(n+1) + P^2(n+1)\,Q^2(n) - 2\,P^2(n)\,P^2(n+1) + 2\,P(n)\,P(n+1)\sqrt{Q^2(n) - P^2(n)}\sqrt{Q^2(n+1) - P^2(n+1)}$$

şi deci:

$$\sqrt{Q^2(n) - P^2(n)} \times \sqrt{Q^2(n+1) - P^2(n+1)} = \text{raţional.}$$

Insemnând aci cu $H(n)$ câtimea de sub radicalul cel dintâi, căpătăm $H(n)\,H(n+1) = \text{patrat}$, de unde:

$$H(n+1) = H(n) \times \text{patrat perfect.}$$

Dar $H(n)$ e un polinom. Atunci dacă despărţim în $H(n)$ de o parte factorii patraţi şi de altă parte factorii la puterea întâia, pe care-i însemnăm cu $R(n)$, ajungem la relaţia:

$$R(n+1) = R(n) \times \text{patrat.}$$

Or, e evident că o astfel de relaţie nu e posibilă decât dacă:

$$R(n+1) = \text{const.}\, R(n),$$

adică $R(n) = \text{const.}$ şi deci $H(n)$ *e un patrat perfect.* c. c. t. d.

Revenind atunci la problema noastră, chestiunea se simplifică. Găsirea lui P conduce la rezolvarea relaţiei:

$$Q^2(n) - P^2(n) = \text{patrat,}$$

adică la *descompunerea lui* $Q^2(n)$ *într'o sumă de două patrate.* Or, $Q(n)$ e un polinom de grad finit în n; deci problema descompunerei are o soluţie afirmativă sau sau negativă. In acest de al doilea caz, însumarea propusă nu se poate face prin metoda noastră. Dar, dacă descompunerea se poate face, atunci trebuesc încercate toate soluţiile date de descompunere spre a vedea care satisface la ecuaţia funcţională. Astfel se găseşte câtimea $\frac{P(n)}{Q(n)}$ astfel ca:

$$\arcsin \frac{A(n)}{B(n)} = \arcsin \frac{P(n)}{Q(n)} - \arcsin \frac{P(n+1)}{Q(n+1)}.$$

O discuţiune mai e încă necesară aci, ca şi în cazul lui arc tg, asupra determinărei unghiului care trebue luată. Presupunem, de ex., că toţi $\frac{A(n)}{B(n)}$ sunt pozitivi, aşa că $\arcsin \frac{A}{B}$ e în cadranul întâi.

Dacă $\frac{P(n)}{Q(n)}$ e *descrescătoare*, atunci luând $\arcsin \frac{P}{Q}$ în *primul cadran*, diferenţa:

$$\arcsin \frac{P(n)}{Q(n)} - \arcsin \frac{P(n+1)}{Q(n+1)}$$

e *pozitivă* şi ea dă răspunsul cel bun.

Dacă însă $\frac{P(n)}{Q(n)}$ e *crescătoare*, atunci dac'am lua $\arcsin \frac{P}{Q}$ în primul cadran, diferenţa citată ar fi negativă şi nu corespunde problemei. Trebue dar ca în acest caz să luăm $\arcsin \frac{P}{Q}$ în *cadranul al doilea*, pentru ca diferenţa să fie pozitivă şi să reprezinte efectiv pe $\arcsin \frac{A}{B}$.

Această discuţie e esenţială în calcularea diferitelor însumări. Cu convenţia precedentă. asupra alegerei determinărilor, suma cerută devine:

$$\sum_{p}^{\infty} \arcsin \frac{A(n)}{B(n)} = \sum_{p}^{\infty} \left(\arcsin \frac{P(n)}{Q(n)} - \arcsin \frac{P(n+1)}{Q(n+1)} \right)$$

$$= \arcsin \frac{P(p)}{Q(p)} - \arcsin \lim_{n \to \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}.$$

Exemplu. Să se calculeze suma:

$$S = \sum_{1}^{\infty} \arcsin \frac{2n^2+2n+2}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$$

$\left(\text{arcul fiind cuprins între } -\frac{\pi}{2} \text{ și } +\frac{\pi}{2}\right)$.

Avem aci:

$$Q(n)\,Q(n+1) = S(n)\,(n^2+1)\,(n^2+2n+2)$$

$$Q(n) = n^2+1 \quad \therefore \quad S(n) = 1$$

și obținem ecuația funcțională:

$$P(n)\sqrt{(n^2+2n+2)^2 - P^2(n+1)} -$$

$$P(n+1)\sqrt{(n^2+1)^2 - P^2(n)} = 2n^2+2n+2.$$

Trebue să descompunem în o sumă de două patrate pe $(n^2+1)^2 = n^4+2n^2+1$. Or, polinoamele care ridicate la patrat și adunate, dau n^4+2n^2+1 sunt cel mult de gradul al doilea. Deci avem de rezolvat:

$$n^4+2n^2+1 \equiv (\alpha n^2+\beta n+\gamma)^2 + (\alpha' n^2+\beta' n+\gamma')^2$$

de unde, prin identificare:

$$\alpha^2+\alpha'^2 = 1 \quad \therefore \quad \alpha\beta+\alpha'\beta' = 0 \quad \therefore \quad \beta\gamma+\beta'\gamma' = 0$$

$$\beta^2+\beta'^2+2\alpha\gamma+2\alpha'\gamma' = 2 \quad \therefore \quad \gamma^2+\gamma'^2 = 1.$$

Să presupunem $\alpha > 0$, ceia ce nu restrânge nimic din generalitate. Fie atunci:

$$\alpha = \cos k \quad \therefore \quad \alpha' = \sin k.$$

Rezultă:

$$\beta = -\beta' \operatorname{tg} k \quad \therefore \quad \gamma' = \gamma \operatorname{tg} k$$

$$\frac{\beta'^2}{\cos^2 k} + 2\gamma(\cos k + \sin k \operatorname{tg} k) = 2 \quad \therefore \quad \gamma^2(1+\operatorname{tg}^2 k) = 1$$

de unde:

$$\gamma^2 = \cos^2 k \quad \therefore \quad \frac{\beta'^2}{\cos^2 k} + \frac{2\gamma}{\cos k} = 2$$

$$\gamma = \pm \cos k.$$

a) Pentru $\gamma = \cos k$ se deduce:

$$\beta' = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma' = \sin k$$

cele două polinoame sunt:

$$\cos k\,(n^2+1) \quad \text{și} \quad \sin k\,(n^2+1),$$

care dau, evident, descompunerea cerută:

b) Dacă însă $\gamma = -\cos k$, atunci:

$$\beta' = \pm 2\cos k; \quad \gamma' = -\sin k; \quad \beta = \mp 2\sin k$$

și obținem descompunerea:

$$(n^2+1)^2 = [\cos k \,.\, n^2 \mp 2\sin k \,.\, n - \cos k]^2 +$$

$$[\sin k \,.\, n^2 \pm 2\cos k \,.\, n - \sin k]^2.$$

Se verifică ușor că pentru:

$$P(n) = n^2\cos k + 2n\sin k - \cos k$$

$$\sqrt{(n^2+1)^2 - P^2(n)} = n^2\sin k - 2n\cos k - \sin k$$

ecuația noastră funcțională e verificată *oricare ar fi* k. Urmează că:

$$\varphi(n) = \frac{n^2\cos k + 2n\sin k - \cos k}{n^2+1}$$

și, în fine:

$$\sum_{1}^{\infty} \arcsin \frac{2n^2+2n+2}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} =$$

$$\sum_{1}^{\infty} \left[\arcsin \frac{n^2\cos k + 2n\sin k - \cos k}{n^2+1} - \right.$$

$$\left. \arcsin \frac{(n+1)^2\cos k + 2(n+1)\sin k - \cos k}{n^2+2n+2} \right].$$

Trebue să mai facem discuția asupra determinărilor de luat în arcele din descompunere. Pentru simplificarea raționamentelor, vom da lui k o valoare particulară, ceiace evident că nu restrânge generalitatea. D. p. să luăm $k = \frac{\pi}{2}$. Atunci:

$$S = \sum_{1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{2n}{n^2+1} - \arcsin \frac{2(n+1)}{n^2+2n+2} \right).$$

Expresia $\frac{2n}{n^2+1}$ fiind continuu descrescătoare pentru $n > 1$, luăm arcele în *primul* cadran, în baza observărilor făcute anterior. Rezultă:

$$S = \arcsin \frac{2}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Acelaș rezultat se obține pentru orice valoare a

lui k. De pildă, să mai luăm şi $k=0$. Atunci argumentul arcelor rezultate din descompunere e:

$$\frac{n^2-1}{n^2+1}=1-\frac{2}{n^2+1}$$

şi e continuu crescător pentru n pozitiv. Deci, aci trebue să luăm arcele din cadranul *al doilea* în:

$$S=\sum_1^{\infty}\left(\arcsin\frac{n^2-1}{n^2+1}-\arcsin\frac{n^2+2n}{n^2+2n+2}\right)=$$

$$\arcsin 0-\arcsin 1=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Exemplele date sunt suficiente pentru a lămuri în ce fel trebuesc tratate problemele analoage de însumări.

NOTE MATEMATICE

3. — *Asupra eliminatului a două ecuaţii de gradul al doilea.*

Fie ecuaţiile:

$$ax^2+bx+c=0$$
$$a'x^2+b'x+c'=0.$$

Ne propunem să găsim — pe altă cale decât cele obicinuite — condiţia ca aceste două ecuaţii să aibe o rădăcină comună.

Fie x_1 rădăcina comună a celor două ecuaţii. Scriind relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi avem:

$$(1)\qquad x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1+x_2'=-\frac{b'}{a'}$$

$$(2)\qquad x_1x_2=\frac{c}{a},\quad x_1x_2'=-\frac{c'}{a'}.$$

Eliminând din primele două relaţii (1) pe x_1 avem:

$$(3)\qquad x_2-x_2'=-\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}=\frac{ab'-a'b}{aa'}$$

iar din (2) prin împărţire găsim:

$$(4)\qquad \frac{x_2}{x_2'}=\frac{a'c}{ac'}.$$

Sistemul de ecuaţii (3) şi (4) ne permite să găsim sau pe x_2 sau pe x_2'. Scoţând din (4) pe x_2 şi înlocuindu-l în (3) găsim pentru x_2' valoarea:

$$x_2'=\frac{ab'-a'b}{a'c-ac'}\cdot\frac{c'}{a'}.$$

Ori prin ipoteză x_2' e o rădăcină a ecuaţiei $a'x^2+b'x+c'=0$ deci substituind-o trebue s'o satisfacă. Avem deci:

$$a'\left(\frac{ab'-a'b}{a'c-ac'}\right)^2\frac{c'^2}{a'^2}+b'\frac{ab'-a'b}{a'c-ac'}\cdot\frac{c'}{a'}+c'=0.$$

Făcând calculele obţinem condiţia ca cele două ecuaţii date să aibe o rădăcină comună:

$$(ab'-a'b)(bc'-b'c)-(ac'-a'c)^2=0.$$

Explicaţia acestei metode este evidentă şi o lăsăm pe seama cititorilor.

ŞT. MUSTA

4. — *Asupra articolului „Generalizarea unor identităţi trigonometrice".*

In articolul sus menţionat am generalizat identităţile dintre unghiurile unui triunghiu oarecare folosind formulele de transformare:

$$(1)\qquad A_{2n}=\frac{2^{2n+1}+1}{3}\pi-2^{2n+1}A\quad\text{etc.}$$

şi

$$A'_{2n}=2^{2n}A-\frac{2^{2n}-1}{3}\pi\quad\text{etc.}$$

în care A, B şi C sunt unghiurile unui triunghiu oarecare, deci $A+B+C=\pi$.

In această notă îmi propun să deduc pe o cale geometrică formulele (1).

Voiu lua ca triunghiu fundamental triunghiul ABC ale cărui unghiuri vor fi A, B şi C. Să căutăm acum expresiunea triunghiurilor triunghiului ortic în funcţiune de unghiurile triunghiului de referinţă ABC.

Observând figura vedem că laturile BC şi B_1C_1 sunt antiparalele deci avem:

$$\sphericalangle B=\sphericalangle A_1B_1C=\sphericalangle C_1B_1A$$

şi atunci $\sphericalangle B_1=\pi-2B$ deci expresiunea lor este:

(2) $A_1=\pi-2A$; $B_1=\pi-2B$ şi $C_1=\pi-2C_1$

Acum în mod analog triunghiul ortic al triunghiului $A_1B_1C_1$ are ca expresiuni:

$$A_2=\pi-2A_1;\quad B_2=\pi-2B_1;\quad C_2=\pi-2C_1$$

şi înlocuind pe A_1, B_1 şi C_1 prin valorile din (1) obţinem:

$$(3) \qquad A_2 = (-1)^2 2^2 A + (-1)^{2-1} \pi \quad \text{etc.}$$

Analog triunghiul ortic al lui $A_2 B_2 C_2$ are expresii analoage.

Scriind valorile lor succesive avem:

$$A_1 = (-1)^1 2^1 A + (-1)^0 \pi \quad \text{etc.}$$

$$A_2 = (-1)^2 2^2 A + (-1)^{2-1} \pi \quad \text{etc.}$$

$$A_3 = (-1)^3 2^3 A + (-1)^{3-1} (2^{3-1} - 1) \pi \quad \text{etc.}$$

$$A_4 = (-1)^4 2^4 A + (-1)^{4-1} (2^{4-1} - 2^{3-1} + 1) \pi \quad \text{etc.}$$

$$A_5 = (-1)^5 2^5 A + (-1)^{5-1} (2^{5-1} - 2^{4-1} + 2^{3-1} - 1) \pi \quad \text{etc.}$$

$$A^6 = (-1)^6 2^6 A + (-1)^{6-1} (2^{6-1} - 2^{5-1} + 2^{4-1} - 2^{3-1} + 1) \pi \quad \text{etc.}$$

. . . . . .

. . . . . .

a) $$A_{2n} = (-1)^{2n} 2^{2n} A + (-1)^{2n-1} [2^{2n-1} - 2^{2n-2} + \ldots - 2^{3-1} + 1] \pi \quad \text{etc.}$$

b) $$A_{2n+1} = (-1)^{2n+1} 2^{2n+1} A + (-1)^{2n} [2^{2n} - 2^{2n-1} + \ldots + 2^{3-1} - 1] \pi \quad \text{etc.}$$

Ne oprim la aceste două expresiuni generale în care făcând $n = 1, 2, 3 \ldots$ obţinem relaţiile de mai sus. Relaţiile (*a*) şi (*b*) le putem scrie mai scurt dacă însumăm parantezele mari:

$$(1) \qquad A_{2n} = 2^{2n} A - \frac{2^{2n} - 1}{3} \pi;$$

$$B_{2n} = B^{2n} B - \frac{2^{2n} - 1}{3} \pi \quad \text{etc.}$$

$$(2) \qquad A_{2n+1} = \frac{2^{2n+1} + 1}{3} \pi - 2^{2n+1} A;$$

$$B_{2n+1} = \frac{2^{2n+1} + 1}{3} \pi - 2^{2n+1} B \quad \text{etc.}$$

Acestea's formulele pe care le-am întrebuinţat în articolul sus menţionat, şi spiritul de generalizare se vede imediat, dacă într'o relaţie dintre unghiurile triunghiului A B C punem în loc de A, B şi C unghiurile A_{2n}, B_{2n}, C_{2n} sau A_{2n+1}, B_{2n+1}, C_{2n+1} atunci relaţia are loc între unghiurile triunghiului $A_{2n} B_{2n} C_{2n}$; sau $A_{2n+1} B_{2n+1} C_{2n+1}$.

Observaţie. Puteam obţine şi relaţiile:

$$A = \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{2^{2n+1} + 1}{3} \pi - \frac{A_1}{2^{2n+1}} \quad \text{etc.}$$

şi $$A' = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{2^{2n} - 1}{3} \pi + \frac{A_1}{2^{2n}} \quad \text{etc.}$$

Considerând în loc de triunghiul ortic şi următoarele, triunghiul format de bisectoarele exterioare ale triunghiului fundamental şi următoarele.

NICOLAE I. MANOLESCU

BIBLIOGRAFIE

1, *Gazeta Matematică,* anul XXXII, No. 7, Martie 1927, Dobânda anticipativă, de *I. Ionescu.* Curba polară a unei curbe plane. Generalizarea curbei diametrale la curbele strâmbe. Observare asupra ecuaţiei diferenţiale generale a conicelor (urmare şi sfârşit), de *Th. Anheluţă.* Rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei: $a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + l^2 = m^2 + n^2 + \ldots + t^2$, de *Emil Ştefănescu.*

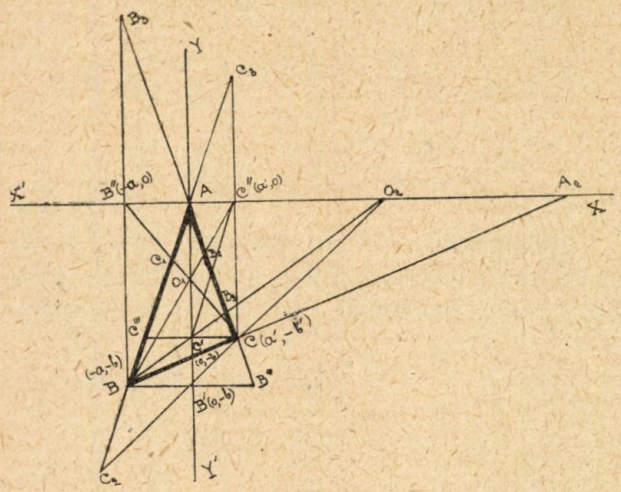
2. *Bulletin Mathématique, de la Société Roumaine des Sciences.* Tome 29, fascicule 2, Jullet-Décembre 1926. Nouvelles formules somatoires, *Rodolphe Raclis.* Détermination fonctionelle de l'addition, *Octave Onicescu.* Sur l'approximation d'une fonction réele, *Georges Alexici.* L'étude d'une classe de polynomes et de la corespondance entre les problémes bilocaux pour les équations différentielles linéaires et les équations intégrales *Fredholm, E. Abasohn.*

3. *Curierul Matematic,* vol. III, No. 2, Aprilie 1927. O clasă de ecuaţii cu toate rădăcinele reale, de Sublocot. *M. Focşeneanu.*

PROBLEME REZOLVATE

551. — *Se dă triunghiul* A B C. *Fie* B', B'' *proecţiile lui* B *pe bisectoarea interioară şi pe bisectoarea exterioară a unghiului* A, *iar* C' *şi* C'' *proecţiile lui* C *pe aceleaşi bisectoare. Să se demonstreze că dreptele* B C' *şi* C B' *se întâlnesc pe bisectoarea exterioară a unghiului* A, *pe când dreptele* B C'', C B'' *se întâlnesc pe bisectoarea interioară a aceluiaşi unghiu.*

COL. GH. BUICLIU



Fie A_1 și A_2 piciorul bisectoarei interioară și exterioară a unghiului A. Dacă B''' și C''' sunt respectiv intersecțiile dreptelor BB' și CC' cu AC și AB, observăm că avem:

(1) $B'B=-B'B'''$, $C'C=-C'C'''$ și $BC'''=CB'''$,

de oarece triunghiurile dreptunghice $AB'B$, $AB'B'''$ și $AC'C$, $AC'C'''$ sunt egale două câte două. Fie acum B_2, C_2 intersecțiile dreptelor BC', CB' respectiv cu AC și AB.

Triunghiul ABB''' tăiat de transversala $C_2B'C$, ne dă conform teoremei lui *Menelaus:*

$$(2)\qquad \frac{CB'''}{CA}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}\cdot\frac{B'B}{B'B'''}=1.$$

Triunghiul ACC''' tăiat de trasversala $BC'B_2$, ne dă:

$$(3)\qquad \frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{BA}{BC'''}\cdot\frac{CC'''}{C'C}=1.$$

Inmulțind relațiile (2) și (3), ținând seama de (1), găsim:

$$(4)\qquad \frac{C_2A}{C_2B}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{BA}{CA}=1.$$

Ținând încă seamă, că:

$$\frac{BA}{CA}=-\frac{A_2B}{A_2C},$$

căci piciorul unei bisectoare împarte latura corespunzătoare în părți proporționale cu laturile adiacente, relația (4) devine:

$$(5)\qquad \frac{C_2A}{C_2B}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}=-1,$$

ceiace dovedește că BC', CB' și AA_2 sunt concurente, împărțind laturile triunghiului ABC în segmente ce satisfac relația (5). Să demonstrăm acum și partea a doua a problemei.

Fie B_1 și C_1 respectiv intersecțiile dreptelor BC'' și CB'' cu AC și AB. Dacă B_3 și C_3 sunt intersecțiile dreptelor BB'' și CC'' respectiv cu AC și AB, avem:

$$(6)\qquad B''B_3=-B''B,\ C''C_3=-C''C,$$

$$CB_3=CA+AB_3=CA+AB=-(BA+AC)=$$
$$-(BA+AC_3)=-BC_3$$

Din triunghiul ABB_3 tăiat de transversala CB'' scoatem relația:

$$(7)\qquad \frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B''B}{B''B_3}\cdot\frac{CB_3}{CA}=1.$$

Din triunghiul ACC_3 tăiat de transversala BC'', avem:

$$(8)\qquad \frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{BA}{BC_3}\cdot\frac{C''C_3}{C''C}=1.$$

Inmulțind relațiile (7) și (8), și ținând seamă de relațiile (6), găsim:

$$(9)\qquad \frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{BA}{CA}=-1$$

A_1 fiind piciorul bisectoarei din A, avem încă:

$$\frac{BA}{CA}=\frac{A_1B}{A_1C},$$

și atunci (9) devine:

$$(10)\qquad \frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=-1,$$

ceiace dovedește că dreptele BB_1, CC_1 și AA_1 sunt concurente, ele împărțind laturile triunghiului ABC, în segmente, cari satisfaç relația (10).

Soluții date de d-nii: *Antoniu V.* (lic. Cluj), *Atanasiu C-tin* (Bolgrad), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dinu D-tru* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), *Popescu N. Corneliu* (Caracal), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

Altă soluție dată de d-nii: *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova) și *Iovănescu Felix*.

Triunghiurile $BB'A$ și $CC'C''$ se observă ușor că sunt asemenea, având laturile paralele două câte două, prin urmare dreptele ce unesc extremitățile laturilor paralele, se întâlnesc în centrul de omotetie O_2.

Triunghiurile $CC'C''$ și $BB''A$ sunt și ele asemenea, având laturile paralele și atunci rezultă că dreptele ce unesc extremitățile laturilor paralele se întâlnesc în centrul de omotetie O_1.

Soluție analitică. Luăm ca axe AA_2 și AA_1. Pentru a demonstra prima parte trebue a dovedi că punctul O_2 de intersecție al dreptelor $B'C$ și $C'B$ are ordonata nulă. Observând figura, putem scri ușor ecuația dreptei $BC'O_2$:

$$(1) \qquad y = \frac{b - b'}{a} x - b'.$$

Asemenea ecuația dreptei $B'CO_2$, este:

$$(2) \qquad y = \frac{b - b'}{a} x - b.$$

Coordonatele punctului O_2 sunt soluțiile sistemului format de ecuațiile (1) și (2), anume:

$$x = \frac{a\,a'}{a - a'}, \quad y = \frac{a'b - a\,b'}{a - a'}.$$

De oarece dreptunghiurile $AA'BB''$ și $AC'CC''$ sunt asemenea, avem:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \text{sau} \quad a'b - a\,b' = 0,$$

rezultă deci: $y = 0$.

Pentru partea a doua a problemei, trebue să dovedim că punctul de intersecție O_1, al dreptelor BC'' și CB'', are abscisa nulă.

Scriem ecuațiile dreptelor BC'' și CB'':

$$\begin{cases} y = \dfrac{b}{a + a'} x - \dfrac{a'b}{a + a'} \\ y = -\dfrac{b}{a + a'} x - \dfrac{a\,b'}{a + a'}. \end{cases}$$

Soluțiile acestui sistem, coordonatele punctului O_1, sunt:

$$x = \frac{a'b - a\,b'}{a + a'}, \quad y = -\frac{b\,b'}{b + b'},$$

dar cum am arătat, că:

$$a'b - a\,b' = 0,$$

rezultă:

$$x = 0,$$

ce trebuia să dovedim.

Soluții date de d-nii: *Both Ioan* (Gherla), *Cocorandu Dan* (Șc. Militară de Geniu), *D mitrescu I. Eugen*, *Frumușelu H. Gh.* (Alexandria) și *Simionov Kindin*.

598. — *Fie:*

$$\Delta_i \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}.$$

Să se stabilească identitatea:

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 b_3 & c_1 b_3 & b_2 a_3 & d_2 a_3 \\ a_1 d_3 & c_1 d_3 & b_2 c_3 & d_2 c_3 \\ b_1 b_4 & d_1 b_4 & a_2 a_4 & c_2 a_4 \\ b_1 d_4 & d_1 d_4 & a_2 c_4 & c_2 c_4 \end{vmatrix}$$

N. G. BOTEA

Soluție dată de d-l *Novacu Valeriu* (lic. Arad).

Putem scrie:

$$(1) \qquad \Delta_1 \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$(2) \qquad \Delta_3 \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_3 & 0 & 0 & a_3 \\ d_3 & 0 & 0 & c_3 \\ 0 & b_4 & a_4 & 0 \\ 0 & d_4 & c_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Înmulțind relațiile (1) și (2), ținând seamă de regula de înmulțire a determinanților, putem scri:

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 b_3 & c_1 b_3 & b_2 a_3 & d_2 a_3 \\ a_1 d_3 & c_1 d_3 & b_2 c_3 & d_2 c_3 \\ b_1 b_4 & d_1 b_4 & a_2 a_4 & c_2 a_4 \\ b_1 d_4 & d_1 d_4 & a_2 c_4 & c_2 c_4 \end{vmatrix},$$

care este tocmai identitatea cerută.

Altă soluție dată de d-nii: *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iași), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Patron Th. N.* și *Stoica Aureliu* (lic, Cantemir, București).

Insemnând cu E membrul al 2-lea al identității date și desvoltându-l după regula lui *Laplace*, obținem:

$$E=\begin{vmatrix} a_1 b_3 & c_1 b_3 \\ a_1 d_3 & c_1 d_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_2 a_4 & c_2 a_4 \\ a_2 c_4 & c_2 c_4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 b_3 & c_1 b_3 \\ b_1 b_4 & d_1 b_4 \end{vmatrix}\cdot$$

$$\begin{vmatrix} b_1 c_3 & d_2 c_3 \\ a_2 c_4 & c_2 c_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 b_3 & c_1 b_3 \\ b_1 d_4 & d_1 d_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_2 c_3 & d_2 c_3 \\ a_2 a_4 & c_2 a_4 \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} a_1 d_3 & c_1 d_3 \\ b_1 b_4 & d_1 b_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_1 a_3 & d_2 a_3 \\ a_2 c_4 & c_2 c_4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 d_3 & c_1 d_3 \\ b_1 d_4 & d_1 d_4 \end{vmatrix}\cdot$$

$$\begin{vmatrix} b_2 a_3 & d_2 a_3 \\ a_2 a_4 & c_2 a_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 b_4 & d_1 b_4 \\ b_1 d_4 & d_1 d_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_2 a_3 & d_2 a_3 \\ b_2 c_3 & d_2 c_3 \end{vmatrix}.$$

Observând că primul și ultimul termen sunt nuli și dezvoltând ceilalți termeni, putem scrie:

$$E=-\Delta_1\Delta_2(-b_3c_3b_4c_4+b_3c_3a_4d_4+$$

$$a_3d_3b_4c_4-a_3d_3a_4d_4)=\Delta_1\Delta_2[b_3c_3(b_4c_4-a_4d_4)+$$

$$a_3d_3(a_4d_4-b_4c_4)]=\Delta_1\Delta_2(b_3c_3-a_3d_3)(b_4c_4-a_4d_4)$$

$$=\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4,$$

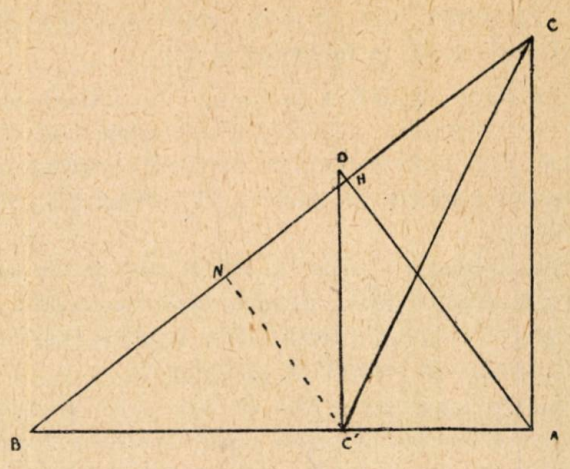
adică tocmai identitatea cerută.

Alte soluții mai lungi datè de d-nii: *Bălășescu N. C.* (Târgoviște), *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, București), *Călniceanu Gh.* (Șc. Polit., Timișoara), *Costăchescu V. C-tin* (lic Milit., Iași), *Duport George* (București), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Iancu D-tru* (lic. Național, Iași), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr. București), *Popescu St. Toma* (lic. Pitești), *Popescu C. Virgiliu* (llc, Târgoviște), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București) și *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student).

Au trimis soluții și d-nii: *Pârvu Aurel* (lic Lazăr, București), *Popa Ștefan* (Șc. Polit. Timișoara) și *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov).

599. — *Se dă triunghiul* A B C *dreptunghic în* A. *Fie* C′ *piciorul bisectoarei unghiului* C *pe* A B *și* H *piciorul înălțimei* A H. *Perpendiculara în* C′ *pe* A B *întâlnește pe* A H *în* D. *Să se demonstreze că lungimele* B C′ *și* A D *sunt egale între ele.*

COL. GH. BUICLIU



Piciorul C′ a bisectoarei din C, împarte latura A B în părți proporționale cu laturile adiacente, avem deci:

$$\frac{BC'}{AC'}=\frac{BC}{AC}$$

$$(1)\qquad \therefore\quad BC'=\frac{AC'\cdot BC}{AC}.$$

Observăm încă, că triunghiurile AC′D și A B C sunt asemenea, având laturile lor respectiv perpendiculare, rezultă atunci proporționalitatea laturilor lor omoloage, anume:

$$\frac{AD}{BC}=\frac{AC'}{AC}$$

$$(2)\qquad \therefore\quad AD=\frac{AC'\cdot BC}{AC}.$$

Comparând relațiile (1) și (2) conchidem ușor:

$$BC'=AD,$$

ceiace trebuia dovedit:

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Birceanu Ovidiu* (lic. Tg.-Jiu), *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, București), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Călniceanu Gh.* (lic. Timișoara), *Ciocionică P., Cocârlan Pavel* (lic. Timișoara), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimoviceanu M. D-tru* (Șc. Polit., Timișoara), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Duport George* (București), *Fericeanu Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Filitti Radu* (lic. Arad), *Frantiu Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Ganea Macedon* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghiev Nicolae* (lic. Bolgrad), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Gheorghe Mihaiu* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Ionescu Ion* (lic. Caracal), *Lăzărescu Nicolae* (lic. Buzești, Craiova), *Lepădatu Miclea* (student), *Mărculescu I. Origen* (lic. Carol, Craiova), *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iași), *Mocuță Traian* (lic. Arad), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, Bu-

cureşti), *Nichita C. Aurel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galaţi), *Patron Th. N.*, *Popa Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu Jean* (Cluj), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu St. Toma* (lic. Piteşti), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Santo Semo* (lic. Silistra), *Savin Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iaşi), *Simionov P. Kindin* (lic. Tulcea), *Stan C.* (lic. Roman), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Şteblea Şt. Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Triculescu R. Ioan* (lic. Buzeşti, Craiova), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu), *Vasilescu Bartolomeu* (Şc. Polit., Bucureşti), *Zagaican Ilie* (Şc. de Cond., Chişinău) şi *Zugrăvescu Ioan* (lic. Braşov).

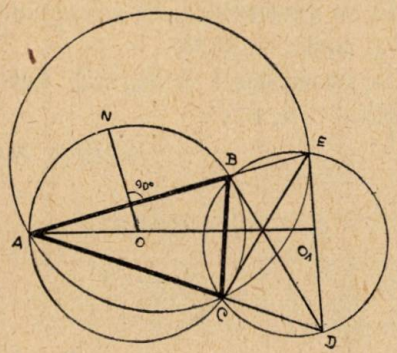
600. — *Se dă triunghiul* A B C. *Tangenta în* B *la cercul* O *circumscris lui* A B C *tae pe* A C *în* D. *Cercul* O_1 *circumscris lui* B C D *tae pe* A B *în* E. *Să se demonstreze:*

1) *Triunghiul* B D E *este isoscel.*

2) *Cercul circumscris lui* A C E *este tangent dreptei* D E.

3) *Dreapta* A O *este perpendiculară pe* D E.

ION PROTOPOPESCU



1. Observăm, că:

$$\overset{\frown}{BED} = 180^0 - \overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{BCA} = \overset{\frown}{BED},$$

ca având drept măsură $\frac{1}{2}$ arc B A. Rezultă că triunghiul B D E este isoscel.

2°. $\overset{\frown}{CED} = \overset{\frown}{CBD}$, având aceiaşi măsură $\frac{1}{2}$ arc C D.

$\overset{\frown}{CBD} = \overset{\frown}{EAC}$, având aceiaşi măsură $\frac{1}{2}$ arc B C.

Rezultă, că:

$$\overset{\frown}{CED} = \overset{\frown}{EAC}.$$

Unghiul C E D, are deci ca măsură:

$$\frac{1}{2} \text{ arc } EMC,$$

rezultă că E D este tangentă cercului A E C.

3°. Dacă N este intersecţia cercului A B C cu perpendiculara lăsată din O pe A B, observăm că:

$$\overset{\frown}{AED} = \overset{\frown}{BCA}$$

ca având acelaşi supliment, $\overset{\frown}{ACB}$.

Dar:

$$\overset{\frown}{BCA} = \overset{\frown}{NOA} = 90^0 - \overset{\frown}{EAO}.$$

rezultă că:

$$\overset{\frown}{AED} = 90 - \overset{\frown}{EAO}.$$

Unghiurile A E D şi E A O fiind complimentare, rezultă că A O este perpendiculară pe D E.

Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Atanasescu Dumitru* (Şc. Polit., Timişoara), *Berzovan Emil* (lic. Arad), *Birceanu Ovidiu* (lic. Tg.-Jiu), *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Câlniceanu Gh.* (lic. Timişoara), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galaţi), *Dimoviceanu M. D-tru* (Şc. Polit., Timişoara), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Fericeanu Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Ganea M.* (Şc. Polit., Timişoara), *Gheorghiev Nicolae* (lic. Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P,-Neamţ), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Ionescu M. Haralambie* (lic. Piteşti), *Lepădatu Miclea* (student), *Manolescu I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit, Iaşi), *Mărculescu I. Origen* (lic. Carol, Craiova), *Munteanu Zeno* (lic. Arad), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, Bucureştt), *Nichita Aurel* (Craiova), *Novacu N.* (lic. Arad), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Potega T. Ioan* (lic. Tg.-Jiu), *Patron Th. N.*, *Popescu Jean* (Cluj, *Popescu Gh. Ovidiu* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu St. Toma* (lic. Piteşti), *Roman I. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Savin Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Stan C.* (lic. Roman), *Steblea Şt. Ştefan* (Şc. Polit., Timişosra), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Triculescu R. Ioan* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vasilescu Bartolomeu* (Şc. Polit., Bucureşti), *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu) şi *Zagaican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău).

610. — *Să se arate că expresiunea:*

$$E = 2^{101} + 3^{101} + 4^{101} + 6^{101},$$

se divide cu 5.

STELIAN D. POPESCU.

Expresiunea dată se poate scri succesiv:

$$E = 2^{101} + (5-2)^{101} + (5-1)^{101} + (5+1)^{101} =$$

$$2^{101} + \text{mult}5 - 2^{101} + \text{mult}5 - 1 + \text{mult}5 + 1 = \text{mult}5$$

ceiace trebuie dovedit.

Soluție dată de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț). *Aldea Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Antonescu Aurel* (lic, M-rea Dealu), *Atanasescu V. D-tru* (Șc. Polit., Timișoara), *Avramescu Th. Ion* (lic. Carol, Craiova), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Crăciunescu N. Eugeniu* (Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Calați), *Dimitriu Gh. Ștefan* (lic. Milit., Iași), *Dinu S. D-t u* (Șc. Conductori, Chișinău), *Dobromirescu P.* (lic Caracal), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Fericeanu Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Iași), *Gheorghiu A.* (lic. P.-Neamț), *Goldstein G. A.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Iliescu Th. Theodor* (student, București), *Ionescu M. Haralambe* (lic. Pitești), *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit, Iași), *Mocuță Traian* (lic. Arad), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureștl), *Podaru Al.* (lic. P.-Neamț), *Popluca G. Mircea* (lic. Arad), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Santo Semo, Scarlat V. D.* (lic. Câmpina), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Șoimulescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Solnițaru V. Nicolae* (lic. Pitești), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați), *Sprinceană C. Ion* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Steblea Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Tomescu Valeriu* (lic. Lazăr, București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student), *Vâlsănescu Viorel* (lic. Pitești), *Zagaican Ilie* (Șc. Cond., Chișinău), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța), *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța), și *Weintraub Mandy* (lic. Lazăr, București).

Generalizare dată de d-nii: *Atanasescu V. D-tru* (Șc. Polit., Timișoara) și *Fericeanu Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara).

Să se arate că expresiunea:

$$E = a^{2n+1} + b^{2n+1} + (a^2)^{2n+1} + (a\,b)^{2n+1} + (a^3)^{2n+1} + (a^2\,b)^{2n+1} + \ldots + (a^k)^{2n+1} + (a^{k-1}\,b)^{2n+1}$$

se divide cu $(a+b)$

Scoțând factor comun pe $a^{2n+1} + b^{2n+1}$, avem:

$$E = (a^{2n+1} + b^{2n+1})[1 + a^{2n+1} + a^{2(2n+1)} + \ldots + a^{k-1(2n+1)}].$$

Cum pentru $a = -b$, primul factor e nul, el se divide deci cu $a+b$, și atunci evident:

$$E = \text{mult}\,(a+b)$$

Pentru: $a = 2,\ b = 3,\ k = 2,\ n = 50,$

avem:

$$E = 2^{101} + 3^{101} + 4^{101} + 5^{101} = \text{mult}\,5,$$

tocmai problema propusă.

PROBLEME PROPUSE

625. — Să se găsească numerile de patru cifre astfel ca ele să fie egale cu de trei ori produsul numerilor formate din primele două cifre și ultimele două cifre.

GH. CONSTANTINESCU

626. — Să se demonstreze că determinantul:

$$\begin{vmatrix} 2^{1927} & -3^{1925} & 7^{1930} \\ 2 & 3 & 7 \\ 2^{1923} & -3^{1921} & 7^{1926} \end{vmatrix},$$

este divizibil cu 5.

C-TIN V. COSTACHESCU

627. — In triunghiul A B C, tangentele la cercurile descrise pe A B și A C ca diametre, în punctele în care cercurile tae a doua oară bisectoarea exterioară a vârfului A, concură pe înălțimea acestui vârf.

CONSTANTIN TH. IONESCU-BUJOR

628. — Fie $A_1 B_1 C_1$ triunghiul format prin ducerea paralelelor prin mijloacele segmentelor cuprinse între vârfuri și ortocentru.

1°. — Să se demonstreze că triunghiurile A B C și $A_1 B_1 C_1$, sunt ortologice.

2°. Să se construiască triunghiul A B C cunoscând triunghiul $A_1 B_1 C_1$.

STAN I AURELIAN

629. — Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}} - \sqrt{\frac{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = 2.$$

ION TH. POPOVICI

630. — Dacă ecuația:

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

are rădăcini reale, atunci ecuația:

$$4\,x^3 + 3\,p\,x^2 + 2\,(q - k^2)\,x - p\,k^2 = 0,$$

are toate rădăcinele reale, oricare ar fi k real.

V. ALACI

631. — Să se verifice identitatea:

$$\sum a \sin\frac{A}{2} \sin^3\frac{B-C}{2} = p \sin\frac{A-B}{2} \sin\frac{B-C}{2} \sin\frac{C-A}{2}$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

NICOLAE I. MANOLESCU

INFORMATIUNI

Legându-se colecţia R. M. T., anul V, în volum, şi rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

De asemenea se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu preţul de lei 80 volumul şi se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzători e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată şi să iscălească.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing.-Şef C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VII. 15 MAI 1927 No. 3

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GHEORGHE I. GRADIN. GENERALIZAREA UNEI PROBLEME
2. NOTE MATEMATICE, 3, 4.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 413 415, 421, 441, 443, 448, 449, 494, 607.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.
Anul VI, broşat, 80 lei.

ANUL VII — NO. 3. TIMISOARA, 15 MAIU 1927

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

GENERALIZAREA UNEI PROBLEME

de GHEORGHE I. GRADIN
Șc. Polit. Timișoara.

In cursul de Mecanică al anului II, dela Școala Politechenică din Timișoara, predat de d-l profesor *V. Vâlcovici* se găsește următoarea problemă:

Un punct material M *de masă m se mișcă pe o dreaptă materială* AB *care poate aluneca în lungul orizontalei* OX *fără frecare. Cunoscând viteza punctului* M *față de* AB, *să se găsească mișcarea sistemului.*

Să considerăm problema mai generală:

n puncte materiale M_1, M_2, ... $M_{(n-1)}$, M_n *de mase* m_1, m_2, ..., m_n *se mișcă pe o dreaptă materială* AB *care poate aluneca în lungul orizontalei* OX *fără frecare. Cunoscând vitezele punctelor* M_1, M_2 ... M_n *față de dreapta* AB *să se găsească mișcarea sistemului.*

Problema aceasta este realizată aproximativ, dacă ne închipuim că M_1, M_2, ..., M_n sunt persoane cari se mișcă într'o barcă AB pe o apă liniștită, sau că M_1, M_2 ..., M_n sunt niște insecte iar AB un fir de paiu așezat pe apă.

Fie m' masa liniei AB, x și y_1, y_2, ..., y_n distanțele punctelor A și M_1, M_2, ..., M_n de un punct fix O al dreptei OX.

Atunci viteza punctelor va fi: $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$, ..., $\dot{y}_n$ iar a unui punct oarecare al dreptei materiale este $\dot{x}$, ambele dirijate în lungul axei OX.

Aplicăm „*Teorema Impulsului*" a cărei ecuație este:

$$\frac{d\,H}{d\,t} = \sum_{i=1}^{n} F_i \tag{1}$$

sau sub altă formă:

$$\frac{d\,M\,\dot{\varrho}}{d\,t} = \sum_{i-1}^{n} F_i$$

unde:

$$M\,\dot{\varrho} = m_1\,\dot{r}_1 + m_2\,\dot{r}_2 + \ldots + m_n\,\dot{r}.$$

Expresiunea (1) ne spune că: *Centrul de greutate al unui sistem de n puncte materiale, se mișcă ca un punct de masă egală cu masa întregului sistem și asupra căruia lucrează toate forțele exterioare, transportate paralel cu ele însăși în centrul de greutate.*

In cazul nostru suma cantităților de mișcare este egală cu:

$$m'\,\dot{x} + m_1\,\dot{y} + \ldots + m_n\,\dot{y}$$

dirijată în lungul axei OX. Cum în această direcțiune forțele exterioare (greutatea sistemului și reacțiunea apei) au o rezultantă nulă, rezultă că ecuația (1) va lua forma:

$$\frac{d\,H}{d\,t} = 0 \quad \therefore \quad H = C\,t.$$

Ori H fiind notația impulsului general vom avea:

$$m'\,\dot{x} + m_1\,\dot{y}_1 + \ldots + m_n\,\dot{y}_n = H = C\,t. \tag{2}$$

Dacă presupunem că sistemul pornește din repaus, atunci valoarea inițială este egală cu zero, așa că vom putea scrie:

$$m'\,\dot{x} + m_1\,\dot{y} + \ldots + m_n\,\dot{y} = 0. \tag{5}$$

Insemnând cu v' și v_1, v_2, ..., v_n vitezele punctelor A și M_1, M_3 ..., M_n și dacă notăm viteza cunoscută a punctelor M_1, M_2 ... M_n față de AB cu: U_1, U_2, ... $U_{(n-1)}$, U_n. atunci vom avea conform celor știute din mișcarea relativă:

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1 = v_1 = v' + U_1 \\ y_2 = v_2 = v' + U_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = v_n = v' + U_n \end{cases}$$

Relația (5) devine în baza relațiilor (3):

$$m' v' + m_1 (v' + U_1) + \ldots + m_n [v' + U_n] = 0$$

sau:

$$v' \left[m' + \sum_{i=1}^{n} m_i \right] + \sum_{i=1}^{n} m_i U_i = 0$$

$$(4)\qquad v' = - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i U_i}{m' + \sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Relațiunea (4) ne dă expresia mișcării sistemului și ne spune că: dreapta A B are o mișcare în sens invers de cum se mișcă în mijlocie, punctul M_1, $M_2 \ldots M_{(n-1)}$, M_n.

Integrând (5) obținem:

$$m' x + m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_{(n-1)} y_{(n-1)} + m_n y_n = c\,t$$

sau:

$$(6)\qquad m' x + \sum_{i=1}^{n} m_i y_1 = c\,t.$$

Relația (6) ne arată că centrul de greutate al sistemului întreg stă pe loc.

Aceleași formule ne explică zdruncinătura armei de foc în momentul descărcării.

Dacă A B este arma iar $M_1, \ldots M_{(n-1)}$, M_n proectilele, atunci formula (4) ne dă viteza cu care este smuncită arma în sens invers de cum merg proectilele în armă.

NOTE MATEMATICE

5. *Generalizarea problemei 597.*

Fie de rezolvat sistemul:

$$(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) f(x_1, x_2 \ldots x_n) = a_1$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) f(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(x_1 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n) f(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_i$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) f(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_n$$

unde $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ este o funcțiune de gradul m omogenă în raport cu necunoscutele: $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Adunăm membru cu membru ecuațiile date, avem:

$$(n-1)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) f(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$(1)\qquad \therefore\quad (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n-1}$$

și scăzând pe rând cele n ecuații date din (1), avem:

$$x_1 f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \frac{-(n-2) a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n-1}$$

$$x_2 f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \frac{a_1 - (n-2) a_2 + \ldots + a_n}{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots - (n-2) a_n}{n-1}$$

sau încă:

$$x_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i - (n-1) a_1}{(n-1)\Delta},\quad x_2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i - (n-1) a_2}{(n-1)\Delta},$$

$$\ldots,\quad x_n = \frac{\sum_{i=1}^{1=n} a_i - (n-1) a_n}{(n-1)\Delta}$$

unde am notat:

$$(2)\qquad \Delta = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

Inlocuind valorile găsite necunoscutelor $x_1, x_2 \ldots x_n$ în (2), găsim:

$$\Delta = f\left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i - (n-1)a_1}{(n-1)\Delta}, \ldots, \frac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i - (n-1)a_n}{(n-1)\Delta}\right]$$

sau încă:

$$\Delta = \frac{1}{(n-1)^m \Delta^m}\left[\sum_{i=1}^{i=n} a_i - (n-1)a_1, \ldots, \sum_{i=1}^{i=n} a_i - (n-1)a_n\right],$$

de unde scoatem că:

$$\Delta = \frac{1}{(n-1)^{\frac{m}{m+1}}} f^{\frac{1}{m+1}}\left[\sum_{i=1}^{i=n} a_i - (n-1)a_1, \ldots, \sum_{i=1}^{i=n} a_i - (n-1)a_n\right]\left(\cos\frac{2k\pi}{m+1} + i\sin\frac{2k\pi}{m+1}\right)$$

$(k = 0, 12 \ldots m)$

rezultă că:

$$x_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i - (n-1)a_\alpha}{(n-1)^{\frac{1}{m-1}} f^{\frac{1}{m-1}}\left[\sum_{i=1}^{i=1} a_i - (n-1)a_1, \ldots, \sum_{i=1}^{i=1} a_i - (n-1)a_n\right]\left(\cos\frac{2k\pi}{m+1} + i\sin\frac{2k\pi}{m+1}\right)} \quad (k=0, 12 \ldots m)$$

Dacă facem: $n = 3$, $m = 3$, și:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$$

avem problema No. 597.

Dacă facem $n = 3$, avem generalizarea dată la pag. 21 a acestei probleme.

GHEORGHE TH. GHERGHIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXII, No. 7, Aprilie 1927. Asupra unor ecuațiuni funcționale, de *A. Angelescu*. Rezolvarea în numere întregi a ecuației: $a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + l^2 = m^2 + n^2 + \ldots + t^2$, de *Emil Ștefănescu*.

PROBLEME REZOLVATE

413. — *Un număr* N *în baza de numerație 9, are 6 cifre. Câte cifre va avea în baza de numerație 5 ?*

ION PROTOPOPESCU

Numărul N este de forma:

(1) $N = 9^5 a + 9^4 b + 9^3 c + 9^2 d + 9e + f,$

a, b, c, d, e, f fiind cifrele lui.

Cel mai mare număr N, se obține luând:

$$a = b = c = d = e = f = 8,$$

adică:

$$N = (888888)_9 = 8(1 + 9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5) = \frac{8(9^6 - 1)}{9 - 1} = 9^6 - 1 = 531444.$$

Numărul N are deci 531444 unități. Să vedem dacă îl scriem în baza 5, câte cifre are? Cea mai mare putere a lui 5, care este cuprinsă în 531444, este 8, căci:

$$5^8 = 390625, \quad 5^9 = 1953125,$$

rezultă că N poate avea cel mult 9 cifre.

Să luăm acum cel mai mic număr N, dat de (1). el se obține luând:

$$a = 1, \quad b = c = d = e = f = 0,$$

adică:

$$N = (100000)_9 = 9^5 = 59049.$$

Cea mai mare putere a lui 5 cuprinsă în 59049, este 6, căci:

$$5^6 = 15625, \quad 5^7 = 78125,$$

rezultă că N poate avea cel puțin 7 cifre.

Numărul cifrelor lui N în sistemul de numerație cu baza 5, poate fi astfel, 7, 8 sau 9.

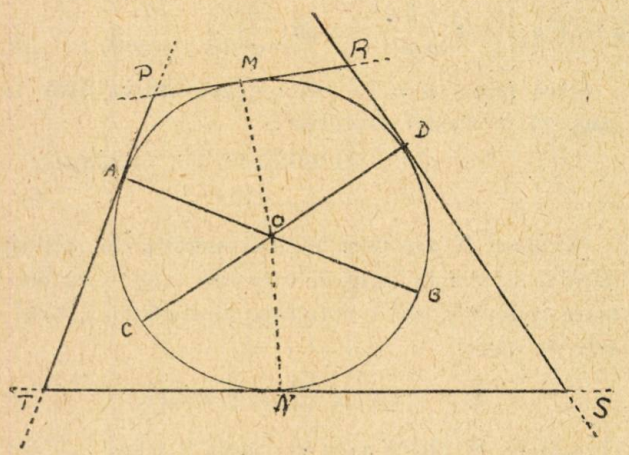
Soluții date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, București), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea G. N.* (lic. Cantemir, București), *Călniceanu Gh.* (Tg.-Jiu), *Constantinescu G. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Florea V. Gheorghe* (lic. Craiova), *Grubenman Ionel* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Hulubei*

Telemac (lic. Internat, Iaşi), *Kestesz Paul* (lic. Arad), *Miu M. Ion*, *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Velea Gr. Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Vulpanovici Boris* (lic. Chişinău) şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti).

415. — *Intr'un cerc* O, *se duc două diametre* A B *şi* C D. *Se ia dela* A *spre* D *şi dela* C *spre* B, *respectiv arcele egale* A M *şi* C N.

Să se arate că tangentele în punctele A, D, M, N *se taie în patru puncte conciclice.*

V. COSNITA



Construim figura în condiţiile problemei. Pentru a dovedi că patrulaterul P R S T este inscriptibil, el fiind convex, e suficient să dovedim că:

$$\sphericalangle P + \sphericalangle S = 180^0.$$

In adevăr, uşor observăm că patrulaterul A P O M este inscriptibil, deci:

(1) $$\sphericalangle P + \sphericalangle AOM = 180^0.$$

De altă parte, din patrulaterul inscriptibil S D O N, avem:

$$\sphericalangle S + \sphericalangle DON = 180^0,$$

dar:

$$\sphericalangle DON + \sphericalangle NOC = 180^0,$$

deci:

$$\sphericalangle S = \sphericalangle NOC.$$

Cum arcele:

$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CN},$$

rezultă, că:

(2) $$\sphericalangle AOM = \sphericalangle NOC = \sphericalangle S.$$

Relaţia (1), în virtutea relaţiei (2), devine:

$$\sphericalangle P + \hat{S} = 180^0,$$

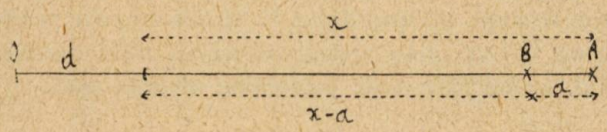
Patrulaterul P R S T fiind şi convex, este astfel inscriptibil.

Soluţii date de d-nii: *Agapescu M. Nicolae* (Sem. Pedag. Iaşi), *Anastasiu P. Vasile* (lic. Botoşani), *Aposteanu Ion* (lic. Timişoara), *Aposteanu Vasile* (lic. Timişoara), *Ardelea Radu* (lic. Milit., Craiova), *Beldie D-tru* (Şc. Polit., Timişoara), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braeşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Caracaş I. Gh.* (Şc. Polit., Timişoara), *Caracostea Andreiu* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Călin M. Gheorghe* (lic. Caracal), *Chiri ă Ion* (lic. Internat, Iaşi), *Ciocoiu Laurenţiu* (lic. Braşov), *Cosma Ż. Gh.* (student), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Daraban N. Paul* (Şc. Pollt., Timişoara), *Dânga S. Vlad* (lic. Orheiu), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealul), *Dimitriu Mihai* (lic. M-rea Dealul), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Dravătz I.* (lic. Ploeşti), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Dugan C. Victor* (lic. M-rea Dealu), *Dumitrescu Al. Gheorghe* (Semin. Ped., Bucureşti), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Frumuşelu H. Gheorghe* (lic. Braşov), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Piteşti), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gherbanowsky F. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghinicescu I. Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Grabowski Eugeniu* (lic. Orheiu), *Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Grofşoreanu Gheorghe* (Lugoj), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir. Bucureşti), *Hărătanu D. Gheorghe* (lic. Internat, Iaşi), *Iacob Şt. Eugeniu* (lic. Botoşani), *Ieremia Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Iliescu Mircea* (lic. M-rea Dealu), *Ioachim Grigore* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Angelo* (Şc. Polit., Timişoara), *Ionescu M. Haralambie* (lic. Piteşti), *Ionescu A. Ştefan* (lic. Buzeşti, Craiova), *Istinie I. C. Brezuică* (lic. Caracal), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Lateş I. Vasile* (Semin. Pedag., Iaşi), *Lepădatu Miclea* (Găneşti), *Manolescu I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Marcovici H.* (lic. Botoşani), *Marcovici Mauriciu* (lic. Botoşani), *Mareş Grigore* (lic. Bacău), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Micula Ovidiu* (lic. Arad), *Mihăilescu Şt. Niculae*, (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Milculescu G. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Mirică V. Teodor* (lic. Buzău), *Munteanu Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Nan Victor* (Şc. Polit., Timişoara), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Neumann Maria* (Lugoj), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Octavian N. F., Olariu T. Enea* (Şc. Polit., Timişoara), *Pascariu Alexe* (Şc. Polit., Timişoara), *Petrescu Şt. Alexandru* (lic. Milit., Craiova), *Placa Mircea* (lic. Botoşani), *Pop Iulian* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu I. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu N. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Popovici Th. Ion* (Şc. Polit., Bucureşti), *Popovici Dan Puiu* (Chişinău), *Puşcă Toma* (lic. Internat, Iaşi), *Rătan I.* (lic. Braşov), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Braşov),

Rusmănică Ioan (lic. Braşov), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Scripcă C. Mihai* (Semin., Pedag., Iaşi), *Segal Leon* (lic. Botoşani), *Şerban Aurel* (lic. Braşov), *Severin C. Marcel* (lic. Botoşani), *Silistrărianu C.* (Ploeşti), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit., Timişoara), *Stănciulescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Ştefănescu Aurel* (lic. Milit., Cernăuţi), *Stoian I.* (lic. Braşov), *Surugiu V.* (lic. M-rea Dealu), *Tăraş Vasile* (Braşov). *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Ţigoiu I., Ţino O. Ovidiu* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Ulea C Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Vasilescu Bartolomeu* (student, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student), *Vasiliu Gh. Niculai* (lic. Focşani), *Velea Gr. Mihai, Velislav Handjief* (Şc. Polit., Timişoara), *Vlădea Ioan* (Şc. Polit, Timişoara), *Voinescu D. Ion* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Zagaican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău) şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti).

421. — *O coloană a cărei lungime este d km., merge cu v km. pe oră, pentru a ajunge la un punct oarecare* A. *În ce moment un călăreţ care merge la urma coloanei să-şi schimbe viteza, pornind cu v' km., pe oră, pentru ca să ajungă într'un punct* B *situat pe aceiaşi direcţie cu* A *şi mai apropiat decât acesta cu a km., înainte cu* $\frac{1}{v}$ *ore, ca vârful coloanei să fi ajuns în* A.

SUBLOCOT. I. M. IONIŢA



Fie x distanţa în km., dintre vârful coloanei şi punctul A, în momentul când călăreţul trebuie să-şi schimbe viteza de mers.

Distanţa ce o are de parcurs călăreţul, pornit din urma coloanei din O, este:

$$d + x - a.$$

Timpul, t necesar coloanei ca să ajungă în A, este:

$$t = \frac{x}{v},$$

iar timpul t_1 necesar călăreţului pentru a ajunge în B, este:

$$t_1 = \frac{d + x - a}{v'}.$$

Conform enunţului trebuie să avem:

$$\frac{x}{v} - \frac{1}{v} = \frac{d + x - a}{v'}$$

$$\therefore \quad x(v' - v) = v' + v(d - a),$$

deci:

$$(1) \qquad x = \frac{v' + v(d - a)}{v' - v}.$$

Călăreţul, va trebui să schimbe viteza din v în v', când se va afla la o distanţă de A, dată de relaţia (1).

Soluţii date de d-nii: *Băncilă Mircea* (lic. Braşov), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea N.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braeşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Dărmănescu I.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag. Bucureşti), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Manoil Eugen* (Maior de Artilerie), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Sava, Bucureşti), *Marcovici H.* (Botoşani), *Pop Iulian* (Şc. Polit., Timişoara), *Popovici Dan Puiu* (Chişinău), *Popovici Th. Ioan, Rucăreanu Nicolae* (lic. Braşov), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti) şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti).

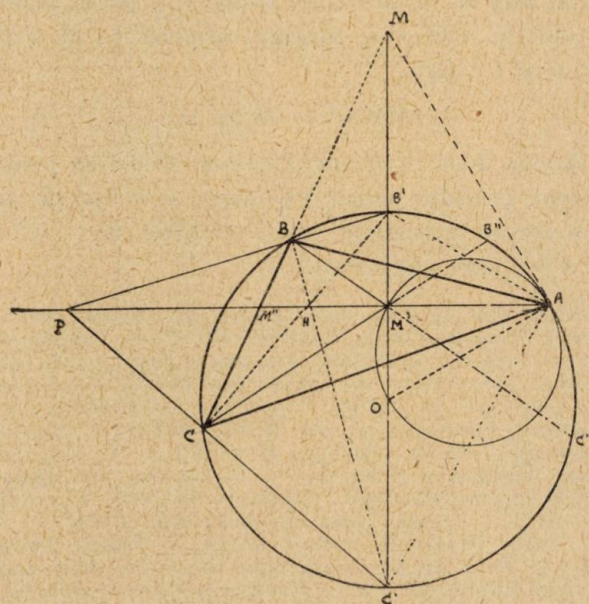
441, — *Fie* M *punctul în care tangenta în* A *la cercul* O *circumscris triunghiului* A B C, *întâlneşte latura* B C. *Dreapta* M O *întâlneşte cercul* O *în* B', C' *şi cercul de diametru* O A *în punctul* M'.

Să se demonstreze că:

$$M M' \cdot M' O = M' B' \cdot M' C' = M' B \cdot M' C,$$

şi că dreptele B B', C C' *şi* A M' *sunt concurente.*

COL. GH. BUICLIU



A M′ fiind înălțime în triunghiurile dreptunghice M A O și B′ A C′, avem:

$$(1) \qquad \overline{A M'}^2 = M M' \cdot M' O = M' B' \cdot M' C'.$$

De altă parte, observăm că A M′ este polara punctului M față de cercul O, deci punctele M, B′, M′, C′ formează o diviziune armonică și considerând fascicolul armonic B (M B′ M′ C′), în care razele B B′ și B C′ sunt perpendiculare, rezultă că ele sunt bisectoarea interioară și exterioară a unghiului format de celelalte două raze, deci B C′ este bisectoarea unghiului C″ B C.

Rezultă de aci:

$$\overset{\frown}{CC'} = \overset{\frown}{C'C''}.$$

și astfel din triunghiurile egale C M′ C′ și C′ M′ C″ rezultă:

$$(2) \qquad M' C'' = M' C.$$

Cum ușor putem scri:

$$M' B' \cdot M' C' = M' B \cdot M' C'',$$

în virtutea egalităților (1) și (2) putem scri:

$$M M' \cdot M' O = M' B' \cdot M' C' = M' B \cdot M' C$$

și astfel egalitățile cerute sunt stabilite.

Să demonstrăm acum, că dreptele B B′, C C′ și A M′ sunt concurente.

Observăm că punctul M′ este conjugat armonic cu M față de B′ și C′, tot astfel M″, un alt punct al polarei A M′ este conjugat armonic cu M față de B și C, deci.

$$(M M' B' C') = (M M'' B C).$$

Aceste două diviziuni armonice, având un punct comun, celelalte puncte omoloage sunt așezate pe trei drepte concurente, deci, dreptele B B′, C C′ și A M′ sunt concurente.

Soluții date de d-nii: *Beju Traian* (lic. Arad), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Caracaș I. George* (Șc. Polit., Timișoara), *Deoanca Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Dravătz Ioan* (lic. Ploești), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Pitești), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Ionescu Th C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu M. Haralambie* (lic. Pitești), *Lepădatu I. Miclea* (student), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Mihăilescu St. Niculae* (lic. Matei-Basarab, București), *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Milit., Craiova), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Panțu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamț), *Rădulescu C. Mihai* (lic. R.-Sărat), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Socaciu Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

443. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\begin{vmatrix} \alpha & a_2 & a_3 \\ \beta & b_2 & b_3 \\ \gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix} s_1 + \begin{vmatrix} a_1 & \alpha & a_3 \\ b_1 & \beta & b_3 \\ c_1 & \gamma & c_3 \end{vmatrix} s_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \alpha \\ b_1 & b_2 & \beta \\ c_1 & c_2 & \gamma \end{vmatrix} = (\alpha + \beta + \gamma) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_3 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

unde:

$$s_i = a_i + b_i + c_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

V. ALACI

Considerăm determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s \\ a_1 & a_2 & a_3 & \alpha \\ b_1 & b_2 & b_3 & \beta \\ c_1 & c_2 & c_3 & \gamma \end{vmatrix}, \quad \text{unde} \quad s = \alpha + \beta + \gamma.$$

Fiecare element al primei linii fiind o sumă de trei termeni, determinantul D se descompune într'o sumă de trei determinanți de același ordin, fiecare nul, având câte două linii egale, rezultă deci:

$$D = 0.$$

Scriind pe D dezvoltat după elementele primii linii, avem:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \alpha \\ b_2 & b_3 & \beta \\ c_2 & c_3 & \gamma \end{vmatrix} s_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \alpha \\ b_1 & b_3 & \beta \\ c_1 & c_3 & \gamma \end{vmatrix} s_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \alpha \\ b_1 & b_2 & \beta \\ c_1 & c_2 & \gamma \end{vmatrix} s_3 - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} s = 0.$$

Aducând în primul determinant elementele coloanei a 3^a în coloană primă și în al 2^{lea} determinant aducând elementele coloanei a 3^a în coloana a 2^a, putem scri încă:

$$\begin{vmatrix} \alpha & a_2 & a_3 \\ \beta & b_2 & b_3 \\ \gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix} s_1 + \begin{vmatrix} a_1 & \alpha & a_3 \\ b_1 & \beta & b_3 \\ c_1 & \gamma & c_3 \end{vmatrix} s_2 +$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \alpha \\ b_1 & b_2 & \beta \\ c_1 & c_2 & \gamma \end{vmatrix} s_3 = (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

care este relaţia ce trebuia stabilită.

Soluţii date de: *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Caftangioglu C. C-tin* (lic. R.-Sărat), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Daraban N. Paul* (Şc. Polit., Timişoara), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Florea V. Gheorghe*, *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Grofşoreanu I. Gh.* (Comloş), *Ioachim Grigore* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Angelo* (Şc. Polit., Timişoara), *Kestesz Paul* (lic. Arad), *Lepădatu I. M.* (lic. Cahul), *Lepădatu I. Victor* (Iaşi), *Manolescu I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Pop Iulian* (Şc. Polit., Timişoara), *Popovici Aurel* (Focşani), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Spacu Gh. Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti).

Altă soluţie. Folosim următoarea teoremă. (R. M. T., an. V, pag. 22).

Dacă într'un determinant oarecare de ordinul m, înlocuim elementele unei coloane prin nişte numere arbitrare, apoi înmulţim determinantul cu suma elementelor scoase şi facem această operaţie pentru fiecare coloană, atunci suma produselor astfel obţinute, este egală cu suma numerelor arbitrare, înmulţită cu determinantul dat.

Dacă considerăm determinantul de ordinul al 3^{lea}:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

şi α, β, γ nişte numere arbitrare, putem scri în virtutea teoremei enunţate:

$$\begin{vmatrix} \alpha & a_2 & a_3 \\ \beta & b_2 & b_3 \\ \gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix} s_1 + \begin{vmatrix} a_1 & \alpha & a_3 \\ b_1 & \beta & b_3 \\ c_1 & \gamma & c_3 \end{vmatrix} s_2 +$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \alpha \\ b_1 & b_2 & \beta \\ c_1 & c_2 & \gamma \end{vmatrix} s_3 = (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

care este tocmai identitatea cerută.

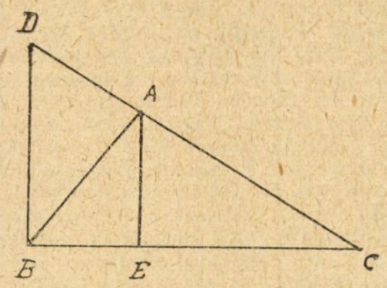
Soluţii analoage date de d-nii: *Agarici Gr. D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Ardeleq Radu* (lic. Milit., Craiova), *Atanasiu M. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Beju Traian* (lic. Arad), *Beldie D-tru* (lic. R.-Sărat), *Beşchea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Braester Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Caftangioglu C. C-tin* (lic. R.-Sărat), *Chirilă Ion* (lic. Internat, Iaşi), *Cosma Z. Gh.* (Bucureşti), *Daraban N. Paul* (Şc. Polit., Timişoara), *Dărmănescu I.* (lic. Buzeşti Craiova), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Feinstein Herman* (lic. P.-Neamţ), *Frumuşelu A. Gh.* (lic. Braşov), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Iscovici Paul* (Piteşti), *Lăzărescu I. Ioan* (lic. Sava, Bucureşti), *Lepădatu I. Victor* (Iaşi), *Marcovici H.* (Botoşani), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iaşi), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti). *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Dan Puiu* (Chişinău), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popovici Th. Ioan*, *Puşcă I. Toma* (lic. Internat, Iaşi), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Rusanda Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Schächter M. Ozias*, *Segal Leon* (lic. Botoşani), *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea).

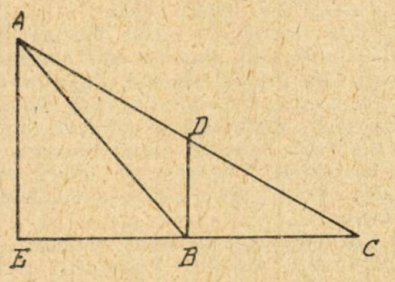
Soluţiuni mai lungi, date de d-nii: *Anastasiu Vasile* (lic. Botoşani), *Aposteanu Ion* (lic. Timişoara), *Bălăşescu N. C.* (Târgovişte), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Boghiu Iosif* (lic. Braşov), *Caracaş I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Dânga S. Vlad* (Orheiu), *Drăgan G.* (lic. Braşov), *Faibovici I. Henri* (lic. Buzeşti, Craiova), *Foca Ilie* (Cluj), *Franţiu Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gherbanovschi F. Nicolae* (Orhei), *Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit. Timişoara), *Grigore Ioan* (lic Piteşti), *Grofşoreanu I. Gheorghe* (Comloş), *Iacob Şt. Eugen* (lic. Botoşani), *Ianculescu Octavian* (Şc. Milit. de Pilotaj), *Ionescu Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Lăzărescu I. Ion* (lic. Sava, Bucureşti), *Marineanu Traian* (lic. Timişoara), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Popescu N. Ioan* (Cluj), *Popovici Dan Puiu* (Chişinău), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Târgovişte), *Potârnich Octav*, *Purdila C-tin* (lic. Braşov), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Rusanda Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Scripcă Laur* (Iaşi), *Şerban Aurel* (lic. Braşov), *Severin C. Marcel* (lic. Botoşani), *Simionov Kindin*, *Socaciu Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit., Timişoara), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Stoicescu Theodor* (lic. Brăila), *Taraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu C. C.* (lic. Tg.-Mureş), *Tanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sava, Bucureşti), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student), *Vulpanovici Boris* (lic. Chişinău) şi *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iaşi).

448. — *In triunghiul* A B C *perpendiculara ridicată din* B *pe* B C, *tae latura* A C *în* D, *aşa fel ca,* 2 A D = A C. *Să se arate că în acest caz laturile triunghiului dat sunt legate între ele prin relaţia:*

$$3(\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2) = \overline{BC}^2 \text{ sau } 3\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2.$$

ION PROTOPOPESCU





Proectăm vârful A pe latura BC în E, şi observăm că:

$$EC = 2BE,$$

laturile BD şi AE fiind paralele.

In triunghiurile dreptunghice EAC şi EAB, putem scrie:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{EC}^2$$

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{EB}^2.$$

Primii membrii fiind egali, rezultă:

$$\overline{AC}^2 - \overline{EC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{EB}^2$$

sau:

$$(1) \qquad \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{EC}^2 - \overline{EB}^2.$$

Acum vom distinge două cazuri:

1°. $\sphericalangle B < 90°$. In acest caz vedem pe figură, că:

$$EC = \frac{2}{3}BC, \quad EB = \frac{1}{3}BC.$$

Relaţiunea (1) devine astfel:

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \frac{4}{9}\overline{BC}^2 - \frac{1}{9}\overline{BC}^2 = \frac{1}{3}\overline{BC}^2,$$

sau:

$$3(\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2) = \overline{BC}^2.$$

2°. $\sphericalangle B > 90°$. In acest caz:

$$EC = 2BC, \quad EB = BC,$$

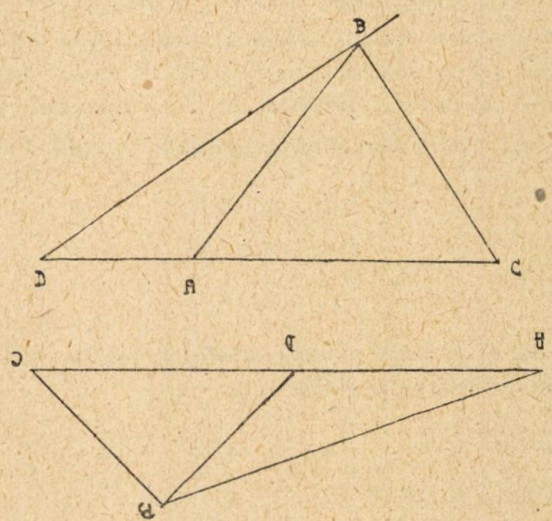
şi relaţia (1) devine:

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 4\overline{BC}^2 - \overline{BC}^2,$$

sau:

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 3\overline{BC}^2.$$

Soluţii date de d-nii: *Agapescu M. Nicolae* (Semin. Pedag., Iaşi), *Bălăşescu C.* (lic. Tg.-Mureş), *Beldie D-tru* (Şc. Polit., Timişoara), *Cercel C-tin* (lic. Tg.-Mureş), *Cogan Alter* (Chişinău), *Daraban N. Paul* (Şc. Polit., Timişoara), *Dărmănescu I.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Dumitrescu Eugen* (lic. Buzău), *Feldstein M. Solomon* (lic. Piteşti), *Frăţilă D. Oancea* (lic. Ploeşti), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Piteşti), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Mareş Grigore* (lic. Bacău), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Minea I. Titus* (lic. Roman), *Motaş C.* (Bucureşti), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Petrescu Gh. Nicolae* (lic. Tg.-Mureş), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Tg.-Mureş). *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Râpeanu N. Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Săndulescu I. Ioan* (lic. Milit., Chişinău), *Scripcă Laur* (Iaşi), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Tudose C. Tănase* (lic. (lic. Câmpina), *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iaşi) şi *Winkler Alfred* (Semin., Pedag., Iaşi).



Altă soluţie. Vom considera şi aci două cazuri:

1°. $\sphericalangle B < 90°$. Aplicăm teorema lui *Stewart:*

$$(2) \qquad \overline{BD}^2 \cdot \overline{AC} + \overline{BC}^2 \cdot \overline{DA} - \overline{AB}^2 \cdot \overline{DC} = \overline{DA} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DC}.$$

Dar observăm că:

$$\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{BC}^2 = \left(\frac{3\overline{AC}}{2}\right)^2 - \overline{BC}^2,$$

$$AD=\frac{AC}{2},\quad DC=\frac{3AC}{2},$$

și înlocuind în (2), avem:

$$\left(\frac{9AC^2}{4}-BC^2\right)AC+BC^2\cdot\frac{AC}{2}-AB^2\cdot\frac{3AC}{2}=\frac{AC}{2}\cdot AC\cdot\frac{3AC}{2}.$$

Simplificând cu AC, și aducând la același numitor, avem:

$$9AC^2-4BC^2+2BC^2-6AB^2=3AC^2,$$

sau:

$$3(AC^2-AB^2)=BC^2.$$

2°. $\sphericalangle B>90^0$. Aplicăm teorema lui *Stewart*, avem:

$$(3)\quad AB^2\cdot DC+BC^2\cdot AD-BD^2\cdot AC=AD\cdot DC\cdot AC.$$

Dar:

$$AD=DC=\frac{AC}{2}\quad\text{și}\quad DB^2=\frac{AC^2}{2}-BC^2,$$

și înlocuind în (3), găsim:

$$AB^2\cdot\frac{AC}{2}+BC^2\cdot\frac{AC}{2}-\left(\frac{AC^2}{4}-BC^2\right)\cdot AC=\frac{AC}{2}\cdot\frac{AC}{2}\cdot AC.$$

Simplificând cu AC și aducând la același numitor, avem:

$$2AB^2+2BC^2-AC^2+4BC^2=AC^2$$

sau:

$$3BC^2=AC^2-AB.$$

Soluții analoage date de d-nii: *Atanasiu M. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Bădescu Aurelian* (lic. Sava, București), *Băncilă Mircea* (lic. Brașov), *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Călniceanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Cristescu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Deoanca Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Dordea Nicolae* (lic. Sibiu), *Dravătz I.* (lic. Ploești), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Pitești), *Goldstein Paul* (lic. Național, Iași), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Pitești), *Ionescu Angelo* (Șc. Polit., Timișoara), *Ionescu M. Haralambie* (lic. Pitești), *Irhasiu Viorel* (Șc. Polit., Timișoara), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Matak Radu* (Semin. Pedag., București), *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Milit., Craiova), *Nicolau I. C.* (Curtea-de-Argeș), *Nicolau Dobridor* (lic. Milit., Craiova), *Niculescu Șt. Emanuel* (lic. Milit.. Craiova), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Aurel* (student), *Popovici Th. Ioan, Rusanda Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Sfințescu I. Duiliu* (lic. Lazăr, București), *Sigall Louis* (lic. Național, Iași), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Țanovici V. C-tin* (Șc. Polit, Timișoara), *Vasiliu Alexandru* (lic. Ploești), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sava, București), *Vlădea Ioan* (Șc. Polit., Timișoara).

Alte soluții date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, București), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Dânga S. Vlad* (Orhei), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Foca I., Frumușelu Gh.* (Brașov), *Gherbanovshi F. Nicolae* (Orhei), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Gradin I. Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Grofșorean I. Gheorghe* (Comloș), *Handjief V.* (Șc. Polit., Timișoara), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu M. I.* (Corabia), *Iovănescu Felix, Lepădatu I. Miclea* (lic. Cahul), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iași), *Nicolau C.* (R.-Sărat), *Pascariu Alexe* (Șc. Polit., Timișoara), *Pâslaru I. Nicolae* (lic. R.-Sărat), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Pop Iulian* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu N. Ioan* (Cluj), *Rapaport Avram* (lic. Botoșani), *Scripcă C. Mihai* (Semin. Pedag., Iași), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Simionov Kindin, Spacu Gh. Petru* (Șc. Polit.. Timișoara), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea), *Zamfirescu Alexandru* (lic. Pitești) și *Zamfirescu Ioan* (lic. Pitești).

Soluții date încă de d-ni: *Căzămir A. Iosif* (lic Arad), și *Macuță Tralan* (lic. Arad).

449. — *Fie* AB *și* AC *respectiv o coardă și un diametru al aceluiași cerc* O, M *un punct pe* AB, D *piciorul perpendicularei lăsate din* M *pe* AC *și* E *una din intersecțiile dreptei* MD *cu cercul* O. *Să se arate că cercurile* DCE *și* BEM *sunt tangente.*

V. VALCOVICI

Construim figura în condițiile problemei și ducem tangenta TT' cercului DCE.

Observăm că:

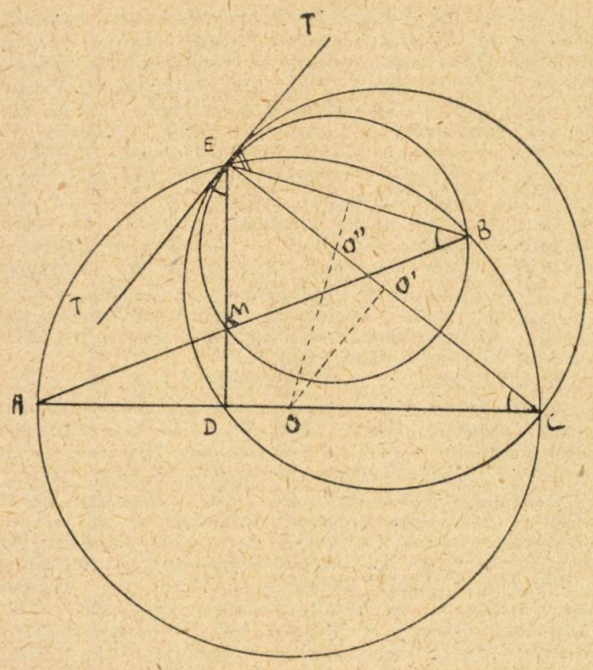
$$(1)\quad \sphericalangle DCE=\sphericalangle TED,$$

ca având aceiași măsură, $\frac{\overset{\frown}{ED}}{2}$.

Avem încă:

$$(2)\quad \sphericalangle DCE=\sphericalangle ABE,$$

ca având aceiași măsură, $\frac{\overset{\frown}{ED}}{2}$.



Rezultă din (1) și (2), că:

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle TED,$$

și deci că dreapta T T′ este tangentă și cercului B E M. Cercurile D C E și B E M având în E aceiași tangentă T T′, sunt tangente între ele.

Soluții date de d-nii: *Anastasiu Vasile* (lic. Botoșani), *Atanasiu M. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Bădescu Aurelian* (lic. Sava, București), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Carabețeanu Gh. Petre* (lic. Lazăr, București), *Câlniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Dânga S. Vlad* (Orheiu), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dravătz I.* (lic. Ploești), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Feldstein M. Solomon* (lic. Pitești), *Frățilă D. Oancea* (lic. Ploești), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Pitești), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Gheorghiu Traian* (Șc. Polit., Timișoara), *Iliovici C-tin* (lic. Ploești), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Pitești), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Koneczny Arthur* (lic. Roman), *Lepădatu Miclea* (Găești), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Marineanu Traian* (lic. Timișoara), *Mihăilescu St. Niculae* (lic. Matei-Basarab, București), *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nicolau I. Dobridor* (lic. Milit., Craiova), *Niculescu St. Emanuel* (lic. Milit., Craiova), *Novacu A. Valeriu* (lic. Arad), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamțu), *Popa Iulian* (lic. Făgăraș), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Aurel* (Focșani), *Potopeanu G.* (Timișoara), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Săndulescu I. Ioan* (lic. Mil., Craiova), *Scripcă Mihai* (Semin., Pedag., Iași), *Socaciu Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Segal Leon*, *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Winkler Alfred* (Semin. Pedag., Iași), *Zamfirescu Alexandru* (Pitești) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

Soluții date încă de d-nii: *Bălăsescu N. C. Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), și *Macuță Traian* (lic. Arad).

494. — *Să se afle câți cai putere trebuesc pentru a aduce un punct material din* O *în* A *într'o secundă, știind că* O *exercită asupra punctului material o forță elastică atractivă, care devine de 100 kg. în momentul când punctul se găsește în* A.

V. Valcovici

Soluție dată de d-l *Stelian Popescu* (lic. Lazăr, București).

Fie x elongația punctului și k coeficientul de elasticitate. Forța elastică va avea valoarea:

$$-kx$$

iar lucrul mecanic corespunzător unei deplasări dx va fi:

$$-kx\,dx.$$

Lucrul mecanic necesar pentru a duce punctul din O în A este dat de suma:

$$L = \int_0^l kx\,dx$$

unde am însemnat cu l distanța O A exprimată în metri. Deducem pentru L valoarea:

$$L = k\frac{l^2}{2}.$$

Pe k îl putem exprima în funcțiune de l ținând seama de valoarea forței elastice în A. Vom avea:

$$kl = 100 \text{ kg.}$$

de unde:

$$k = \frac{100}{l}\ \frac{kg}{m}.$$

Inlocuind în valoarea lucrului mecanic și transformând în cai putere obținem puterea căutată:

$$P = \frac{2}{3}l \text{ CV.}$$

607. — *Să se dovedească că dacă ecuația:*

$$x^2 + px + q = 0$$

are toate rădăcinile reale, atunci și ecuația:

$$6x^2 + 6(2k+p)x + 4k^2 + 6pk + p^2 + 2q = 0,$$

are toate rădăcinele reale, oricare ar fi k *real.*

V. Alaci

Ecuația:

$$x^2+px+q=0, \tag{1}$$

având rădăcinile reale, realizantul său este pozitiv, adică:

$$p^2-4q>0. \tag{6}$$

De altă parte realizantul ecuației:

$$6x^2+6(2k+p)x+4k^2+6pk+p^2+2q=0, \tag{3}$$

este:

$$9(2k+p)^2-6(4k^2+6pk+p^2+2q)=$$

$$12k^2+3p^2-12q=3(4k^2+p^2-4q).$$

In virtutea relațiunei (2), $p^2-4q>0$, apoi k fiind real k^2 este pozitiv, așa că, putem scri:

$$3(4k^2+p^2-4q)>0.$$

Realizantul ecuației (3) fiind astfel pozitiv, ecuația (3) are și ea rădăcinile reale.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Atanasescu D-tru* (Șc. Polit., Timișoara), *Birkenthal Alexandru* (lic. Lazăr, București), *Câlniceanu Gh.* (lic. Timișoara), *Cocârlan P.* (lic. Timișoara), *Crăciunescu N. Eugen* (Craiova), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Duport George* (București), *Fericeanu Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Filitti Radu* (lic. Arad), *Ganea M.* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Goldstein G. A.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Hamparțum R. Gr.* (lic. Constanța), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Iliescu Th. Theodor* (student, București), *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iași), *Mărculescu I. Origen* (lic. Carol, Craiova), *Mihaiu Gheorghe* (lic. Mil., Craiova), *Nichita C. Aurel* (lic. Buzești, Craiova), *Panțu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Pavel A. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Popa Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu Gh. Ovidiu* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin Ioan* (lic. Milit., Iași), *Stan Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Șteblea St. Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Triculescu R. Ioan* (lic. Buzești, Craiova), *Vasiliu Gh. Oheorghe* (student), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Soluții date încă de d-nii: *Arsene Alexandru* (lic. Milit. Iași), *Belcescu D-tru* (lic. Milit. Iași), *Burdeianu Adrian* (lic. Milit. Iași), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Cernăuți Iosif* (lic. Timișoara), *Demetrescu A.* (lic. Lazăr, București), *Dimitriu Ștefan* (lic. Milit. Iași), *Stinger Alexandru* (București), *Gârneață Grach* (lic. Milit. Iași), *Höepfner Gh. Virgil* (lic. Câmpina), *Ignat I. Paul* (lic. Milit. Iași), *Iostf Iovănescu D-tru* (lic. Buzești, Craiova), *Lepădatu I. Miclea* (Găneștl), *Panaite N. Theodor* (lic. Miiit. Iași), *Popescu C. Virgil* (lic. Târgoviște), *Segărceanu D. C.* (Craiova), *Șerban Mircea* (lic. Milit. Iași), *Vâlceanu N. Iustin* (lic. Tg. Jiu), și *Vonica C. Ioan* (lic. Tg. Jiu).

Soluția 2ª dată de d-l *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara).

Pentru ca ecuația (2) să aibă rădăcinele reale, formând șirul lui *Rolle*, ar trebui să avem:

$$f(-\infty) \quad f\left(-k-\frac{p}{2}\right) \quad f(+\infty)$$

$$+ \qquad - \qquad +,$$

unde $-k-\frac{p}{2}$ este rădăcina derivatei ecuației (2).

Dar $f\left(-k-\frac{p}{2}\right)$ relativ la ecuația (2) este:

$$f\left(-k-\frac{p}{2}\right)=6\left(-k-\frac{p}{2}\right)^2+$$

$$6(2k+p)\left(-k-\frac{p}{2}\right)+4k^2+6pk+p^2+2q=$$

$$-\frac{1}{2}(4k^2+p^2-4q),$$

cantitate în adevăr negativă fiind că ecuația (1) având rădăcini reale:

$$p^2-4q>0,$$

apoi k^2 este pozitiv, k fiind real; urmează deci că ecuația (2) are rădăcini reale, șirul lui *Rolle* având două variații.

Soluția 3ª dată de d-l *Ianculescu Octavian* (Șc. Polit., Timișoara).

Ecuația (1) având toate rădăcinele reale, și ecuația:

$$x^2+px+q+k(x^2+px+q)'=$$

$$x^2+(p+2k)x+pk+q=0, \tag{4}$$

are toate rădăcinele reale (C. de P. Cap. XLII, de *A. G. Ioachimescu*).

Ecuația (4) având toate rădăcinile reale, evident că și ecuația:

$$(2x+p+2k)[x^2+(p+2k)x+pk+q]=0,$$

are toate rădăcinele reale și atunci și derivata acestei ecuații are toate rădăcinele reale, adică ecuația:

$$2[x^2+(p+2k)x+pk+q]+[2x+(p+2k)]^2=0$$

sau:

$$6x^2+6(p+2k)x+4k^2+6pk+p^2+2q=0,$$

are toate rădăcinele reale, ceia ce trebuia dovedit.

PROBLEME PROPUSE

632. — Dacă n este un număr întreg oarecare, expresiunea:

$$\frac{(4n+5)^2+4n+5}{15}\cdot\frac{(4n+4)^2-4(n+1)}{3}\cdot\frac{(5n+5)(196n^2-49)}{16},$$

este un întreg.

CEZAR COSNITA

633. — Să se demonstreze că expresiunea:

$$(7+2^{100})\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2^5&1\\9&4&2^{50}\end{vmatrix}+37\begin{vmatrix}2^{100}&3&1\\1&5&1\\6&9&2^{50}\end{vmatrix}+2(2^{49}+1)\begin{vmatrix}2^{100}&1&3\\1&2^5&5\\6&4&9\end{vmatrix},$$

este divizibilă cu 17.

V. ALACI

634. — Se dă un triunghiu ABC și un punct M în planul acestuia. Să se circumscrie acestui triunghiu un altul omologic cu el, astfel ca centrul de omologie să fie în M.

S. M. FELSTEIN

635. — Se dau în plan două drepte Δ_1 și Δ_2 și punctele A și B în planul lor. Să se găsească pe dreapta Δ_1 punctul P, așa fel ca PA și PB să intercepteze pe dreapta Δ_2 un segment de o lungime l dată. Discuție.

ION PROTOPOPESCU

636. — Dacă $p>q$, se cere să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^n]{x^p+q}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^{n-1}]{x^p+q}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^{n-2}]{x^p+q}}+\cdots+\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^2]{x^p+q}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^p+q}}+\frac{x^p+x^q}{x^p+q}}}}}}=0,$$

numărul radicalilor fiind n.

IANCULESCU OCTVIAN

637. — Să se demonstreze că avem:

$$\begin{vmatrix}a\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}&a\,\mathrm{cotg}\frac{A}{2}&a^2+\alpha^2\\b\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}&b\,\mathrm{cosg}\frac{B}{2}&b^2+\beta^2\\c\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}&c\,\mathrm{cotg}\frac{C}{2}&c^2+\gamma^2\end{vmatrix}=0,$$

α, β, γ fiind segmentele cuprinse între vârfuri și ortocentru.

COSTACHESCU V. C-TIN

638. — Să se calculeze direct derivata determinantului:

$$\Delta=\begin{vmatrix}b^x c^x-a^{2x}&b^{2x}-a^x c^x&a^x b^x-c^{2x}\\b^{2x}-a^x c^x&a^x b^x-c^{2x}&a^{2x}-b^x c^x\\a^x b^x-c^{2x}&a^{2x}-b^x c^x&a^x c^x-b^{2x}\end{vmatrix}$$

POPESCU D. STELIAN

639. — In orice triunghiu, avem:

$$\alpha^2(b+c)+\beta^2(c+a)+\gamma^2(a+b)=12\,s\,r,$$

unde α, β, γ sunt laturile triunghiului ortic.

GHEORGHE TH. GHEORGHIU

INFORMATIUNI

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VII. 15 IUNIE 1927 NO. 4

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. TIB. POPOVICI. GENERALIZAREA UNUI DETERMINANT
2. NOTE MATEMATICE, 6, 7.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 573, 574, 578, 579, 595, 596, 609.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.
Anul V', broşat, 80 lei.

ANUL VII — NO. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1927

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

GENERALIZAREA UNUI DETERMINANT

de TIB. POPOVICI

Pentru tratarea unei chestiuni de geometrie analitică *I. Hunyadi* a stabilit următoarea identitate: (vezi *I. Kürschák „Mathematikai és Fisikai Lapok"* vol. IV, p. 1).

Punem:

$$(a\,b\,c)=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

și:

$$\xi_{a\,b}=y_a z_b - z_a y_b,\quad \eta_{a\,b}=z_a x_b - x_a z_b,$$

$$\zeta_{a\,b}=x_a y_b - x_a x_b$$

avem:

$$\begin{vmatrix} \xi_{b\,c}^2 & \eta_{b\,c}^2 & \zeta_{b\,c}^2 & \eta_{b\,c}\zeta_{b\,c} & \zeta_{b\,c}\xi_{b\,c} & \xi_{b\,c}\eta_{b\,c} \\ \xi_{a\,c}^2 & \eta_{a\,c}^2 & \zeta_{a\,c}^2 & \eta_{a\,c}\zeta_{a\,c} & \zeta_{a\,c}\xi_{a\,c} & \xi_{a\,c}\eta_{a\,c} \\ \xi_{a\,b}^2 & \eta_{a\,b}^2 & \zeta_{a\,b}^2 & \eta_{a\,b}\zeta_{a\,b} & \zeta_{a\,b}\xi_{a\,b} & \xi_{a\,b}\eta_{a\,b} \\ \xi_{a\,d}^2 & \eta_{a\,d}^2 & \zeta_{a\,d}^2 & \eta_{a\,d}\zeta_{a\,d} & \zeta_{a\,d}\xi_{a\,d} & \xi_{a\,d}\eta_{a\,d} \\ \xi_{b\,d}^2 & \eta_{b\,d}^2 & \zeta_{b\,d}^2 & \eta_{b\,d}\zeta_{b\,d} & \zeta_{b\,d}\xi_{b\,d} & \xi_{b\,d}\eta_{b\,d} \\ \xi_{c\,d}^2 & \eta_{c\,d}^2 & \zeta_{c\,d}^2 & \eta_{c\,d}\zeta_{c\,d} & \zeta_{c\,d}\xi_{c\,d} & \xi_{c\,d}\eta_{c\,d} \end{vmatrix} =$$

$$-(a\,b\,c)^2(a\,b\,d)^2(a\,c\,d)^2(b\,c\,d)^2.$$

In cele ce urmează vreau să generalizez această formulă. Voi urma o cale diferită de aceia a lui *Kürschák* și care este indicată în cunoscuta Algebră a lui *Salmon*.

Să considerăm n litere:

$$a,\ b,\ c \ldots l$$

și tabloul:

$$(1)\qquad \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots l_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \ldots l_{n+1} \end{matrix}$$

format cu coeficienții sistemului:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \ldots + l_1 x_n = 0 \\ &a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \ldots + l_2 x_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n+1} x_1 + b_{n+1} x_2 + \ldots + l_{n+1} x_n = 0. \end{aligned}$$

Să formăm determinanții $\delta_1,\ \delta_2, \ldots \delta_{n+1}$ obținuți din tabloul (1) suprimând linia $1^a, 2^a, \ldots (n+1)^a$.

Suprimând două linii și câte o coloană obținem minorii:

$$A_{i,\,k}\quad B_{i.\,k}, \ldots L_{i,\,k}$$

determinanților $\delta_1,\ \delta_2, \ldots \delta_{n+1}$. Avem evident:

$$A_{i,\,k}=A_{k,\,i},\ B_{i,\,k}=B_{k,\,i}, \ldots L_{i,\,k}=L_{k,\,i}.$$

Ne propunem a calcula determinantul:

$$\Delta=\left|A_{i,\,k}^2 B_{i,\,k}^2 \ldots L_{i,\,k}^2\ A_{i,\,k}B_{i,\,k}\ A_{i,\,k}C_{i,\,k}\ldots K_{i,\,k}L_{i,\,k}\right|$$

$i,\ k$ fiind diferiți și luând toate valorile dela 1 până la $n+1$.

Determinantul este de ordinul:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

deci este o funcție omogenă de gradul $(n-1)n(n+1)$ în raport cu coeficienții (1).

Să considerăm acum sistemul:

$$(3)\qquad A_{i,k}\,x_1' + B_{i,k}\,x_1' + \ldots + L_{i,k}\,x_n' = 0$$

de $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaţiuni. Acestea sunt tocmai ecuaţiile adjuncte ale sistemelor de câte n ecuaţiuni alese din sistemul (2).

Ridicând la patrat fiecare din ecuaţiile (3), vedem că determinantul Δ este eliminantul sistemului:

$$(4)\qquad (A_{i,k}\,x_1' + B_{i,k}\,x_2' + \ldots + L_{i,k}\,x_n')^2 = 0$$

de $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaţiuni cu $\frac{n(n+1)}{2}$ necunoscute:

$$x_1'^2,\ x_2'^2, \ldots x_n'^2,\ 2x_1'x_2',\ 2x_1'x_3', \ldots 2x_{n-1}'x_n'.$$

Determinantul Δ se anulează când sistemul (4) are o soluţie diferită de zero. In acest caz însă n ecuaţiuni oarecare din sistemul (3) au o soluţie diferită de zero. Deci dacă Δ se anulează toţi determinanţii de forma:

$$(5)\qquad \delta = |A_{i,k}\ B_{i,k} \ldots L_{i,k}|,$$

se vor anula. Reciproc, determinanţii δ anulându-se sistemul (3) are o soluţie diferită de zero deci şi (4) şi prin urmare Δ se anulează.

Dar toţi determinanţii (5) sunt sau identic nuli sau produse de determinanţi $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{n+1}$. Aceasta se poate arăta calculând produsul $\delta \,.\, \delta_i$.

De exemplu:

$$\delta \,.\, \delta_{n+1} = \begin{vmatrix} A_{1,2} & B_{1,2} \ldots\ldots L_{1,2} \\ A_{2,3} & B_{2,3} \ldots\ldots L_{2,3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n-1,n} & B_{n-1,n} \ldots L_{n-1,n} \\ A_{1,n+1} & B_{1,n+1} \ldots L_{1,n+1} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots l_1 \\ a_2 & b_2 \ldots l_2 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ a_n & b_n \ldots l_n \end{vmatrix}$$

de unde:

$$\delta \,.\, \delta_{n+1} = \begin{vmatrix} \delta_2 & 0 & 0 \ldots . 0 & \delta_{n+1} \\ \delta_1 & \delta_3 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & \delta_2 & \delta_4 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots 0 & \delta_{n-2} & \delta_n & 0 \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 & \delta_{n-1} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{n-1}\, \delta_{n+1}$$

$$\therefore\quad \delta = \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{n-1}$$

Din cele ce preced rezultă că factorii lui Δ sunt tocmai determinanţii δ_i. In virtutea simetriei:

$$\Delta = A\,(\delta_1\, \delta_3 \ldots \delta_{n+1})^k$$

A fiind o constantă numerică. Determinantul Δ fiind de gradul $(n-1)\,n(n+1)$ şi produsul $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{n+1}$ de gradul $n(n+1)$, rezultă:

$$k = n - 1.$$

Constanta este lesne de calculat particularizând tabloul (1). Se găseşte $A = \pm 1$. Deci:

$$(6)\qquad \Delta = \pm\, \delta_1^{n-1}\, \delta_2^{n-1} \ldots \delta_{n-1}^{n-1}$$

semnul depinzând de modul cum sunt aranjate liniile în determinantul Δ.

Egalitatea (6) se poate generaliza şi mai departe considerând în locul tabloului (1) un tablou cu n coloane şi cu $m\,(>n)$ linii.

NOTE MATEMATICE

6. *Asupra problemei 581.* Voi da o generalizare a acestei chestiuni.

Consider sistemul general:

$$\begin{cases} (1)\quad A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 = b \\ (2)\quad A'\,x^2 + B'\,xy + a\,C\,y^2 = a\,b. \end{cases}$$

Inmulţind cu a în ambii membrii (1) şi scăzând din (2) avem:

$$(A' - a\,A)\,x^2 + (B' - a\,B)\,xy = 0,$$

$$x\,[(A' - a\,A)\,x + (B' - a\,B)\,y] = 0.$$

De unde:

$$x=0, \quad y=\pm\sqrt{\frac{b}{C}}.$$

Sau:

$$[(A'-aA)x+(B'-bB)y]=0,$$

$$(3) \qquad x=-\frac{B'-bB}{A'-aA}y \quad \text{sau} \quad x=-\alpha y$$

introducând valoarea lui x în (1):

$$A^2\alpha^2y^2-B\alpha y^2+Cy^2=b$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{b}{A\alpha^2-B\alpha+C}} \qquad x=\mp\alpha\sqrt{\frac{b}{A\alpha^2-B\alpha+C}}$$

Făcând:

$A=1$, $B=1$, $C=1$, $A'=5$, $B'=2$, $a=3$, $b=7$,

rezultă:

$$\alpha=-\frac{1}{2}$$

și deci:

$$\begin{cases} x=0 & y=\pm\sqrt{7} \\ x=\pm 1 & y=\mp 2. \end{cases}$$

NESTOR D.
Lic. Cantemir, București

7. *Asupra podarei conicelor.*

Se cunoaște propoziția; podara focarului unei conice în raport cu acea conică este un cerc — afară de cazul când conica e o parabolă căci atunci podara focarului e o linie dreaptă, tangenta la vârf — cu centrul în centrul conicei și de rază cât semi-axa mare în cazul elipsei și cât semi-axa reală, în cazul iperbolei.

In cele ce urmează ne propunem să găsim reciproca acestei teoreme adică; să găsim curbele cari se bucură de proprietatea că podara unui punct dat este un cerc dat.

Să luăm ca axe de coordonate Ox dreapta ce trece prin centrul cercului și prin punctul dat, iar ca axă Oy perpendiculara ridicată în centrul cercului (O). Fie:

$$(1) \qquad x^2+y^2=a^2$$

ecuația cercului dat și $(\lambda, 0)$ coordonatele punctului P dat. Pentru determinarea curbei $y=f(x)$ care să se bucure de proprietatea sus amintită vom scrie că perpendiculara din P pe tangenta la curba $y=f(x)$, într'un punct oarecare $M(x, y)$, întâlnește această tangentă într'un punct Q, care se găsește pe cercul (1).

Ecuația tangentei în punctul $M(x, y)$ este:

$$(2) \qquad Y-y=y'(X-x),$$

iar a perpendicularei din P:

$$(3) \qquad Y=-\frac{1}{y'}(X-\lambda).$$

Deci pentru a găsi coordonatele punctului Q suntem conduși la rezolvarea sistemului:

$$(4) \qquad \begin{cases} y'X-Y=xy'-y \\ X+y'Y=\lambda, \end{cases}$$

care după un calcul ușor ne dă:

$$Q\begin{cases} X=\dfrac{xy'^2-yy'+\lambda}{1+y'^2} \\ Y=\dfrac{\lambda y'-xy'+y}{1+y'^2} \end{cases}$$

Scriind că acest punct $Q(X, Y)$ se găsește pe cercul (1) avem:

$$(xy'^2-yy'+\lambda)^2+(\lambda y'-xy'+y)^2-a^2(1+y'^2)^2=0.$$

Desvoltând, făcând reducerile și grupând convenabil obținem:

$$y^2(1+y'^2)-2xyy'(1+y'^2)+x^2y'^2(1+y'^2)+$$
$$\lambda^2(1+y'^2)-a^2(1+y'^2)^2=0.$$

sau simplificând cu $1+y'^2$ avem ecuația diferențială la care satisface curbele $y=f(x)$.

$$(5) \quad y^2-2xyy'+x^2y'^2+\lambda^2-a^2(1+y'^2)=0.$$

Rezolvând-o în privința lui y găsim:

$$(6) \qquad y=xy'\pm\sqrt{a^2(1+y'^2)-\lambda^2}$$

care este o ecuație diferențială de tipul *Clairaut.*

Se știe că această ecuație admite o soluție generală formată dintr'o familie de drepte și o soluție singulară care nu este altceva decât înfășurătoarea soluției generale.

In cazul problemei noastre ne interesează evident soluția singulară, care după un calcul ușor se găsește că este dată din eliminarea lui u dintre ecuațiile:

$$(7)\qquad \begin{cases} y - u\,x = \pm\sqrt{a^2(1+u^2)-\lambda^2} \\ x \pm \dfrac{a^2 u}{\sqrt{a^2(1+u^2)-\lambda^2}} = 0. \end{cases}$$

Pentru a face eliminarea lui u observăm că în urma relației prime din (7) a doua relație devine:

$$x + \frac{a^2 u}{y - u\,x} = 0$$

sau:

$$x\,y - u\,x^2 + a^2 u = 0$$

și deci:

$$u = \frac{x\,y}{x^2 - a^2}.$$

Inlocuind această valoare a lui u în prima relație din (7) avem ridicând și la patrat.

$$\left(y - \frac{x^2 y}{x^2 - a^2}\right)^2 = a^2\left[1 + \frac{x^2 y^2}{(x^2-a^2)^2}\right] - \lambda^2$$

sau:

$$\frac{a^4 y^2}{(x^2-a^2)^2} = \frac{a^2\left[(x^2-a^2)^2 + x^2 y^2\right] - \lambda^2 (x^2-a^2)^2}{(x^2-a^2)^2}$$

sau încă:

$$a^4 y^2 = (x^2-a^2)^2 (a^2 - \lambda^2) + a^2 x^2 y^2$$

și deci:

$$a^2 y^2 (x^2-a^2) + (x^2-a^2)^2 (a^2-\lambda^2) = 0$$

sau simplificând cu $x^2 - a^2$ — căci $x^2 - a^2 = 0$ ne dă tangentele în punctele $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$ la cercul nostru — avem:

$$a^2 y^2 + (x^2-a^2)(a^2-\lambda^2) = 0.$$

Impărțind cu $a^2(a^2-\lambda^2)$ avem:

$$(8)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-\lambda^2} - 1 = 0.$$

Discuție. 1°. Dacă $|\lambda| > |a|$ adică dacă punctul P e în afara cercului atunci ecuația (8) se vede ușor că reprezintă o iperbolă.

2. Dacă $|\lambda| < |a|$ atunci această ecuație reprezintă o elipsă.

3°. $\lambda = a$, atunci $y = 0$ caz care nu corespunde naturei problemei noastre.

STEFAN MUSTA.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXII, No. 8, Mai 1927 Metodologia matematicilor, de *Nicolae S. Segârceanu.* O proprietate a parabolei, de *Alexandru Niculescu.*

Premiul „Inginer *H. Capriel*", de *M. Ghermănescu, C. Malcoci* și *P. Sergescu.*

2. *Asupra unor polinoame remarcabile, cu o notă asupra formulei binomului, de Tiberiu Popovici.*

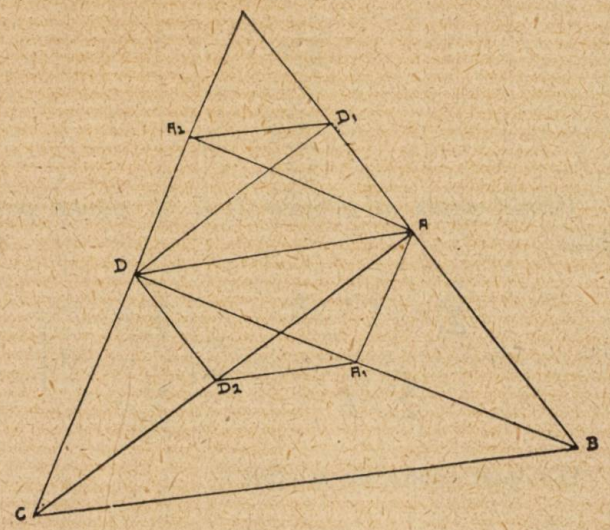
Autorul care este un harnic și priceput student al universității din București, ne dă în această broșură litografiată, cu mici modificări, o lucrare a sa premiată în 1926, de *„Gazeta Matematică"*, cu premiul *„Capriel"*.

PROBLEME REZOLVATE

573. — *Fie dat triunghiul* A B C *și un punct* D *în planul său. Se duc dreptele* D B *și* D C *pe care se proiectează vârful* A *în* A_1 *și* A_2. *Se proiectează apoi punctul* D *pe laturile* A B *și* A C *în* D_1 *și* D_2.

Cum trebuie să fie triunghiul A B C *și cum trebuie găsit punctul* D *astfel ca exagonul* $A\,A_1\,D_2\,D\,A_2\,D_1$ *să fie regulat.*

C-TIN TH. IONESCU-BUJOR



Presupunem problema rezolvată, adică exagonul $A A_1 D_2 D A_2 D_1$ regulat, el este deci inscriptibil într'un cerc. Punctele D_1, D_2 fiind diametral opuse urmează că:

$$\sphericalangle D_2 A D_1 = 90^0,$$

şi deci rezultă că şi:

$$\sphericalangle D_2 A B = 90^0.$$

Triunghiul ABC este deci dreptunghic în A.

De altă parte observăm că:

$$\sphericalangle CDB = 90^0,$$

ca fiind suplimentul unghiul $A_2 D A_1$ înscris într'un semicerc.

Patrulaterul $CDAB$ este deci inscriptibil, unghiurile din D şi A fiind drepte, rezultă că:

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle BDA,$$

ca având aceiaşi măsură. Cum însă unghiul BDA sau $A_1 D A$ are 30^0, observând că este înscris în cercul $A A_1 D_2 D A_2 A_1$, urmează că şi:

$$\sphericalangle ACB = 30^0.$$

Triunghiul ABC trebue să fie dreptunghic în A, având unghiul C de 30^0.

Observăm apoi uşor că punctul D este la intersecţia bisectoarei BD a unghiului ABC cu dreapta care face cu AC un unghiu de 30^0.

Soluţii date de d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Iovănescu D-tru* (lic. Buzeşti, Craiova), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir. Bucureşti), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Stoica N. Aureliu* (Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student), *Vlădea Ioan* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Zamfirescu Gh Ioan* (lic. Piteşti).

Observare. Mulţi corespondenţi neobservând cu atenţie succesiunea vârfurilor exagonului $A A_1 D_2 D A_2 D_1$, au crezut că sunt tocmai în condiţiile problemei 351, şi din această cauză au trimes soluţii greşite.

574. — *Prin vârfurile unei conice se duc paralele asimptotelor. Să se arate că mijlocul segmentului de dreaptă dus prin unul din vârfuri şi cuprins între acele paralele se găseşte pe conică.*

GHORGHE DAVID

Vom lua numai cazul hiperbolei, care are asimtote reale.

Fie:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

o hiperbolă raportată la axe, cu vârfurile $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$.

Asimptotele ei sunt date de ecuaţia:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Dreptele trecând prin vârful A şi paralele cu asimptotele, sunt:

$$y = \pm \frac{b}{a}(x - a),$$

care întâlnesc o dreaptă oare care, ce trece prin A':

$$y = \lambda(x + a),$$

în punctele:

$$P\left(-a\frac{a\lambda + b}{a\lambda - b}, \quad -\frac{2ab\lambda}{a\lambda - b}\right)$$

$$Q\left(-a\frac{a\lambda - b}{a\lambda + b}, \quad \frac{2ab\lambda}{a\lambda + b}\right).$$

Mijlocul dreptei PQ, are drept coordonate:

$$x_1 = -a\frac{a^2\lambda^2 + b^2}{a^2\lambda^2 - b^2}, \quad y_1 = -\frac{2ab^2\lambda}{a^2\lambda^2 - b^2}.$$

Acest punct verifică însă ecuația hiperbolei, în adevăr, avem:

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{(a^2\lambda^2+b^2)^2}{(a^2\lambda^2-b^2)^2}-\frac{4a^2b^2\lambda^2}{(a^2\lambda^2-b^2)^2}=$$

$$\frac{(a^2\lambda^2-b^2)^2}{(a^2\lambda^2-b^2)^2}=1.$$

Proprietatea este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Stan Aurelian* (lic. Milit., Iași) și *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București).

Observare. D-l *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), a dat și o soluție geometrică.

578. — *Segmentul de dreapta* $ON=a$ *se împarte în* n *părți egale și în fiecare punct de diviziune începând din* O *facem să lucreze forțe paralele, respectiv proporționale cu numerele* 1^3, 2^3, $3^3,\ldots n^3$. *Să se determine centrul de greutate a acestor forțe și poziția sa când* n *crește indefinit.*

GRADIN GHEORGHE

Fie $F_1, F_2,\ldots F_n$, forțele ce lucrează succesiv în punctele de diviziune, începând din O.

Prin ipoteză, avem:

$$\frac{F_1}{1^3}=\frac{F_2}{2^2}=\ldots=\frac{F_i}{i^3}=\ldots=\frac{F_n}{n^3}=k,$$

deci:

$$F_i=i^3.k \qquad (i=1,\ 2,\ldots n). \tag{1}$$

Depărtarea dintre două puncte de diviziune consecutive, este, $\frac{a}{n}$, deci forța F_i are punctul său de aplicație pe ON, la o distanță:

$$x_i=\frac{a(i-1)}{n} \qquad (i=1,\ 2,\ldots n). \tag{2}$$

Dacă însemnăm acum cu x distanța dela O la centru de greutate, este cunoscut că această distanță este dată de formula:

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n}F_i x_i}{\sum_{i-1}^{n}F_i}.$$

Ținând seamă de relațiile (1) și (2) putem scri încă:

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n}i^3 k\,\frac{a(i-1)}{n}}{\sum_{i=1}^{n}i^3 k}=\frac{a}{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}i^4}{\sum_{i=1}^{n}i^3}-1\right). \tag{3}$$

Dar sunt cunoscute relațiile:

$$\sum_{i=1}^{n}i^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

$$\sum_{i-1}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(Culegere de probleme de *Ioachimescu*).

Relația (3) devine astfel:

$$x=\frac{a}{n}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\cdot\frac{4}{n^2(n+1)^2}-1\right]=\frac{a}{n}\left[\frac{2(2n+1)(3n^2+3n-1)}{15n(n+1)}-1\right].$$

Aceasta este relația care fixează poziția centrului de greutate.

Pentru $x=\infty$, găsim:

$$\lim_{n=\infty}x=\lim_{n=\infty}a\left[\frac{2(2n+1)(3n^2+3n-1)}{15n^2(n+1)}-\frac{1}{n}\right]=$$

$$a\lim_{n=\infty}\frac{2\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{15\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{4}{5}a.$$

Soluții date de d-nii: *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, București), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Marinescu Iulian* (lic. Călărași), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț) și *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București).

Generalizare. D-nii *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București) și *Novacu Valeriu* (lic. Arad), au tratat cazul când forțele ar fi proporționale cu numerele 1^p, 2^p, $3^p\ldots n^p$.

In acest caz formula (3), devine:

$$(4)\quad x=\frac{a}{n}\left[\frac{\Sigma i^{p+1}}{\Sigma i^{p}}-1\right]=\frac{a}{n}\left(\frac{S_{p+1}}{S_p}-1\right).$$

Folosind relaţia:

$$(n+1)^p-1^p=C_p^i S_{p-1}+\ldots+C_p^i S_{p-i}+\ldots+C_p^p S_0$$

(*Traian Lalescu*, — Calculul Algebric, 18), deducem:

$$S_{p+1}=\frac{(n+1)^{p+1}-\sum_{k=2}^{p+2} C_{p+2}^k S_{p-k+2}}{C_{p+2}^1},$$

şi deci:

$$\frac{S_{p+1}}{n S_p}=\frac{C_{p+1}^1}{C_{p+2}^1}\cdot\frac{f(n)}{f_1(n)},$$

unde $f(n)$ şi $f_1(n)$ sunt două polinoame în n de acelaşi grad, termenii de grad mai mare având coeficientul 1.

Relaţia (4) trecută la limită, devine:

$$\lim_{n=\infty} x=\frac{p+1}{p+2}a.$$

In cazul nostru $p=3$, avem rezultatul găsit mai sus:

$$\lim_{n=\infty} x=\frac{4}{5}a.$$

579. — *Să se găsească un patrat perfect de forma a b c c b a, în care a, b, c reprezintă câte o cifră.*

POPESCU D. STELIAN

Numărul căutat N se poate scrie:

$$N=100001\,a+10010\,b+1100\,c=$$
$$11\,(9091\,a+910\,b+100\,c).$$

Observând că N se divide cu 11, trebuie să se dividă şi cu 11^2, adică:

$$9091\,a+910\,b+100\,c=\text{mult } 11$$

sau:

$$11\,(826\,a+82\,b+9\,c)+5\,a+8\,b+c=\text{mult } 11,$$

de unde rezultă că trebue să avem:

$$(1)\qquad 5\,a+8\,b+c=\text{mult. } 11.$$

De altă parte ştim că terminaţiile unui patrat perfect sunt:

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96.

(Culegere de probleme, XXXIX).

Pentru $b\,a$ putem lua una din aceste grupe, afară de prima, şi relaţia (1) ne determină uşor pe c.

Astfel avem, următorul tablou, punând o liniuţă unde nu putem avea c de o singură cifră:

a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	0	6	9	2	5	4	6	9
4	0	2	6	3	1	9	6	6
9	0	—	1	4	7	6	7	2
6	1	6	4	4	3	1	8	8
1	2	1	9	4	0	4	8	4
4	2	8	6	5	7	9	8	1
5	2	3	1	6	2	6	9	8

Cu aceste date putem forma următoarele numere, *a b c c b a:*

106601, 402204, 616616, 121121, 428824, 523325, 925529, 631136, 147741, 443344, 940049, 657756, 162261, 469964, 966669, 672276, 188881, 484484, 981189, 698896.

Eliminăm dintre aceste numere pe acelea mult. $3+2$ şi mult. 3 fără a fi şi de 9, pentrucă acestea nu pot fi patrate perfecte, rămân:

428824, 443344, 657756, 162261, 188881, 981189, 698896.

Dintre acestea numai numărul 698896 este patrat perfect:

$$698896=836^2,$$

care formează singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iaşi) şi *Savin C. Ion* (lic. Milit., Iaşi).

Altă soluție dată de d-nii: *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București).

Insemnăm cu N patratul căutat. Cifra a poate fi numai, 1, 4, 5, 6, 9. N fiind divizibil cu 11, și rădăcina sa n, este divizibilă cu 11.

Ținând seamă de acestea, vom considera cazurile:

1. $a = 1$, atunci: $N = 1\,b\,c\,c\,b\,1$, este deci cuprins între 100001 și 199991, rezultă că n e cuprins între 316 și 448.

n e deci de forma:

$$3x1,\ 3x9,\ 4x1,\ 4x9.$$

Intre aceste numere, numai:

$$341,\ 319,\ 451,\ 429$$

sunt multipli de 11. Patratul nici unuia din acestea nu are cifrele simetrice, deci în acest caz n'avem soluție.

2. $a = 4$, atunci: $N = 4\,b\,c\,c\,b\,4$.

Rezultă că:

$$400004 \leqslant N \leqslant 499994,$$

iar:

$$632 \leqslant n \leqslant 708$$

și n fiind mult. 11, nu poate fi, decât:

$$682,\ 792,\ 638,\ 748.$$

Nici unul din aceste numere ridicat la patrat, nu ne dă un număr cu cifre simetrice, deci n'avem soluție.

3. $a = 5$, atunci: $N = 52\,c\,c\,25$, $n = 7x5$ și trebuind să fie mult. 11, vom lua:

$$n = 715,$$

dar ridicat la patrat nu ne dă un număr cu cifre simetrice.

4. $a = 6$, atunci $N = 6\,b\,c\,c\,b\,6$.

Rezultă că:

$$600006 \leqslant N \leqslant 699996$$

iar:

$$774 \leqslant n \leqslant 836,$$

n e terminat cu 4 sau 6 și fiind mult. 11, nu poate fi decât:

$$814 \text{ și } 836.$$

Dintre acestea numai patratul lui 836 are cifrele simetrice;

$$836^2 = 698896,$$

5. $a = 9$, atunci: $N = 9\,b\,c\,c\,b\,9$, $n > 948$ și terminat cu 3 sau 7. Putem lua pentru n, numărul 957, a cărui patrat n'are cifrele simetrice.

Singura soluție este deci:

$$836^2 = 698896^2.$$

Alte soluții prin mai multe încercări, date de d-nii: *Avramescu T. Ioan* (lic. Carol, Craiova), *Bălășescu N. C.* (Târgoviște), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal). *Bivolaru C. Victor* (lic. Tg.-Mureș), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Cristescu I.* (lic. Șincai, București), *Dănciulescu Gr- Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Diminescu Gigi, Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Iliescu Th. Theodor* (student, București), *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova), *Iovănescu D-tru* (lic. Buzești, Craiova), *Manoil A., Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iași), *Mătăsaru Traian, Nichita C. Aurel* (lic. Buzești, Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Patron Th. N.* (lic. Milit., Iași), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu St. Toma* (lic. Pitești), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sabetay Andrei* (lic. T.-Severin), *Sassu V. I.* (lic. Tg.-Mureș), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stan C.* (lic. Roman), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Triculescu Ioan* (lic. Buzești, Craiova), *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare), *Vâlceanu Justin* (lic. T.-Jiu) și *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori. Chișinău).

595. — *Pe o foaie de hârtie se află înscris un patrat de cinci cifre. Făcând diferența între cifra 4ª și prima, găsim un număr* N. *Ștergând prima cifră și întorcând foaia spre dreapta de 180°, găsim un număr în care diferența dintre numărul format din primele două cifre și numărul format din ultimele două cifre e un patrat perfect.*

COSTACHESCU V. C-TIN

Fie $a\,b\,c\,d\,e$ patratul cerut. Cifrele b, c, d, e trebuie să fie astfel ca întorcând foaia spre dreapta să fie tot niște cifre.

Vom lua deci dintre terminațiile de patrate perfecte numai grupele:

$$00,\ 01,\ 09,\ 61,\ 81,\ 16,\ 69,\ 96.$$

Avem încă prin ipoteză:

(1) $$d - a = N$$

și însemnând cu b_1, c_1, d_1, e_1, cifrele obținute din b, c, d, e după învârtirea foii, avem încă:

(2) $$e_1 d_1 - c_1 b_1 = N.$$

Cifra a neputând fi zero, și trebuind ca $d \geqq a$, din grupele de două cifre de mai sus, vom lua pentru de, numai: 61, 81, 16, 69, 96.

Să cercetăm pe rând fiecare caz, observând încă că b, c nu pot fi decât: 0, 1, 6, 8, 9 și N de o singură cifră.

1. $de = 61$.

Atunci $e_1 d_1 = 19$. Relațiile (1) și (2) devin:

$$\begin{cases} 6 - a = N \\ 19 - c_1 b_1 = N. \end{cases}$$

Pentru $c_1 b_1$, am putea lua:

$$c_1 b_1 = 19,\ 18,\ 16,\ 11,\ 10$$

ceia ce ne dă:

$$N = 0,\ 1,\ 3,\ 8,\ 9;\quad bc = 61,\ 81,\ 91,\ 11,\ 01,$$

iar a ar putea fi:

$$a = 6 - N = 6,\ 5,\ 3.$$

Cu aceste date putem forma numerile:

66161, 58161, 39161,

dar nici unul nu e patrat perfect:

1. $de = 81$.

Atunci $e_1 d_1 = 18$. Relațiile (1) și (2) devin:

$$\begin{cases} 8 - a = N \\ 18 - c_1 b_1 = N. \end{cases}$$

Pentru $c_1 b_1$, putem lua:

$$c_1 b_1 = 18,\ 16,\ 11,\ 10,\ 9,$$

ceia ce ne dă:

$$N = 0,\ 2,\ 7,\ 8,\ 9;\quad bc = 81,\ 91,\ 11,\ 1,\ 6$$

iar a ar putea fi:

$$a = 8 - N = 8,\ 6,\ 1.$$

Cu aceste date putem forma numerile:

88181, 69181, 11181,

dar nici unul nu e patrat perfect.

3. $de = 16$.

Atunci $e_1 d_1 = 91$. Relațiile (1) și (2) devin:

$$\begin{cases} 1 - a = N \\ 91 - c_1 b_1 = N \end{cases}$$

a poate numai 1, iar $c_1 b_1 = 91$ deci $bc = 16$.

Cu aceste date putem forma numărul, 11616, care nu e patrat perfect.

4. $de = 69$.

Atunci $e_1 d_1 = 69$. Relațiile (1) și (2) devin:

$$\begin{cases} 6 - a = N \\ 69 - c_1 b_1 = N. \end{cases}$$

Pentru $c_1 b_1$ putem lua:

$$c_1 b_1 = 69,\ 68,\ 61,\ 60.$$

ceia ce ne dă:

$$N = 0,\ 1,\ 7,\ 9;\quad bc = 69,\ 89,\ 19,\ 09,$$

iar a ar putea fi:

$$a = 6 - N = 6,\ 5.$$

Cu aceste date putem forma numerile:

66969, 58969,

dar nici unul nu e patrat perfect.

5. $de = 96$.

Atunci $e_1 d_1 = 96$. Relațiile (1) și (2) devin:

$$\begin{cases} 9 - a = N \\ 96 - c_1 b_1 = N. \end{cases}$$

Pentru $c_1 b_1$ putem lua:

$$c_1 b_1 = 96,\ 91,\ 90,\ 89,\ 88.$$

ceia ce ne dă:

$$N = 0,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8;\quad bc = 96,\ 16,\ 06,\ 68,\ 88,$$

iar a ar putea fi:

$$a = 9 - N = 9,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$$

Cu aceste date putem forma numerile:

99696, 41696, 30696, 26896, 18896.

Dintre aceste numere, numai 26896 este patrat perfect:

$$26896 = 164^2,$$

şi formează singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Botea G. Emil* (lic. Cantemir. Bucureşti), *Dânciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Iancu D.* (lic. Naţional, Iaşi), *Marinescu N. Nicolae* (lic. milit., Iaşi), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nichita C. Aurel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Patron Th. N.* (lic. Milit, Iaşi), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Triculescu R. Ioan* (lic. Buzeşti, Craiova), *Tudose C. Tănase* (lic. Câmpina), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare) şi *Vâlceanu N. Justin* (lic. T.-Jiu).

596. — *Să se găsească un patrat perfect, care divizat cu numerile 3, 5 şi 17 să dea respectiv resturile 1, 4 şi 9.*

V. ALACI

Patratele perfecte căutate vor fi de forma:

$$N^2 = (3 \cdot 5\,17\,q + r)^2 = (255\,q + r)^2$$

$$\therefore \quad N = 255\,q + r,$$

unde:

$$r < 255,$$

iar:

$r^2 = \text{mult. } 17 + 9$, adică: $r = \text{mult. } 17 \pm 3$.

Rezultă că r va fi unul din numerile:

$$\begin{gathered} 14,\ 31,\ 48,\ 68,\ 82,\ 99,\ 116,\ 133,\ 150,\ 167, \\ 184,\ 201,\ 218,\ 235,\ 252, \\ 20,\ 37,\ 54,\ 72,\ 88,\ 105,\ 122,\ 139,\ 156,\ 173, \\ 190,\ 207,\ 224,\ 241. \end{gathered} \tag{1}$$

Cum trebue să avem simultan şi:

$r^2 = \text{mult. } 5 + 4$, adică $r = \text{mult. } 5 \pm 2$

şi:

$r^2 = \text{mult. } 3 + 1$, adică $r = \text{mult. } 3 \pm 1$,

vom elimina din şirul (1), numerile care nu îndeplinesc aceste condiţii, deci:

$$r = 82,\ 133,\ 167,\ 218$$

sau:

$$r = 37,\ 88,\ 122,\ 173.$$

Atunci:

$$N = 255\,q + 82,\ 255\,q + 133,\ 255\,q + 167,$$

$$255\,q + 218,\ 255\,q + 37,\ 255\,q + 88,\ 255\,q + 122,$$

$$255\,q + 173,$$

sau:

$$N = \begin{cases} 255\,q \pm 37 \\ 255\,q \pm 82 \\ 255\,q \pm 88 \\ 255\,q \pm 122. \end{cases}$$

Soluţiile căutate vor fi deci de forma:

$$1369 \pm 510 \cdot 37\,q + 255^2\,q^2$$

$$6724 \pm 510 \cdot 82\,q + 255^2\,q^2$$

$$7744 \pm 510 \cdot 88\,q + 255^2\,q^2$$

$$14884 \pm 510 \cdot 122\,q + 255^2\,q^2$$

unde lui q putem să-i dăm valorile:

$$q = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3 \ldots$$

astfel pentru $q = 0$, avem numerile: 1369, 6724, 7744 şi 14884.

Soluţii date de d-nii: *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti) şi *Novacu Valeriu* (lic. Arad).

Soluţii parţiale date de d-nii: *Câlniceanu Gh.* (lic. Timişoara), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Diaconescu V. Alexandru* (lic. Tg.-Jiu), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Manolescu I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Müller C. Gheorghe* (lic. Piteşti), *Nichita Aurel* (Craiova), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Popa Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu C. Virgiliu* (Târgovişte), *Rainer Gheorghe* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Steblea Şt. Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare) şi *Vâlceanu Justin* (lic. Tg.-Jiu).

609. — *Să se verifice identitatea:*

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} & \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}} & \frac{a}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{b}{\sin\frac{\beta}{2}} & \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2}} & \frac{b}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \\ \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}} & \frac{c}{\cos\frac{\gamma}{2}} & \frac{c}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \end{vmatrix} =$$

$$2abc\sqrt{R}\left[\frac{(c-b)\sqrt{a\cot\frac{\alpha}{2}}}{(p-b)(p-c)}+\frac{(a-c)\sqrt{b\cot\frac{\beta}{2}}}{(p-a)(p-c)}+\right.$$

$$\left.\frac{(b-a)\sqrt{c\cot\frac{\gamma}{2}}}{(p-a)(p-b)}\right],$$

α, β, γ fiind respectiv unghiurile opuse laturilor a, b, c într'un triunghiu[1]).

POPESCU D. STELIAN

Insemnând cu Δ determinantul din primul membru și ținând seamă de proprietățile determinanților, putem scri:

$$\Delta=\frac{abc}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \\ 1 & \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \\ 1 & \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{abc}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\right.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$\left.-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right).$$

Folosim acum relațiile cunoscute:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\quad \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ba}},\quad \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

$$abc=4Rs,\quad s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Cu aceste formule putem ușor înțelege relațiile ce urmează:

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$\frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}\left[(p-a)\sqrt{\frac{p-b}{bc(p-c)}}-\right.$$

$$\left.(p-a)\sqrt{\frac{p-c}{bc(p-b)}}\right]=\frac{a\sqrt{bc}}{(p-b)(p-c)}\left(\sqrt{\frac{p-b}{p-c}}-\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{p-c}{p-b}}\right)=\frac{\sqrt{a}\sqrt{4Rs}}{(p-b)(p-c)}\cdot\frac{c-b}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}=$$

$$\frac{2\sqrt{aR}(c-b)}{(p-b)(p-c)}\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-b)(p-c)}}=$$

$$\frac{2\sqrt{aR}(c-b)}{(p-b)(p-c)}\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}=$$

$$\frac{2\sqrt{aR}(c-b)}{(p-b)(p-c)}\sqrt{\cot\frac{\alpha}{2}}=2\sqrt{R}\,\frac{(c-b)\sqrt{a\cot\frac{\alpha}{2}}}{(p-b)(p-c)}.$$

Analog găsim alte două relațiuni. Așa dar, avem:

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$2\sqrt{R}\,\frac{(c-b)\sqrt{a\cot\frac{\alpha}{2}}}{(p-b)(p-c)}$$

1) Enunț rectificat.

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$2\sqrt{R}\,\frac{(a-c)\sqrt{b\cot\frac{\beta}{2}}}{(p-a)(p-c)}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$2\sqrt{R}\,\frac{(b-a)\sqrt{c\cot\frac{\gamma}{2}}}{(p-a)(p-b)}.$$

Inmulțind aceste relațiuni cu $a\,b\,c$ și adunându-le avem:

$$\Delta=2\,a\,b\,c\sqrt{R}\left[\frac{(c-b)\sqrt{a\cot\frac{\alpha}{2}}}{(p-b)(p-c)}+\right.$$

$$\left.\frac{(a-c)\sqrt{b\cot\frac{\beta}{2}}}{(p-a)(p-c)}+\frac{(b-a)\sqrt{c\cot\frac{\gamma}{2}}}{(p-a)(p-b)}\right],$$

adică tocmai relația cerută.

Soluții date de d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, București), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București) și *Tomescu Valeriu* (lic. Lazăr, București).

PROBLEME PROPUSE

640. — Să se arate că fiecare din expresiunile:

$$N_1=1308736^{97}-174^{194}$$

$$N_2=435600\times 660^{95}-63922,$$

se divide prin 659.

POPESCU D. STELIAN

641. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre astfel ca numărul format de prima cifră urmată de suma celei de a doua și a patra cifră, să fie rădăcina lui patrată.

SAVIN IOAN

642. — Fie ABC un triunghiu oarecare și C_1 un punct pe AB între A și B. Se determină punctul A_1 pe BC astfel ca să avem:

$$\left[\frac{C_1A}{C_1B}\right]^2=\frac{A_1C}{A_1B}=k^2.$$

Să se afle aria patrulaterului AA_1CC_1 în funcție de suprafața triunghiului ABC.

ALEXANDRU NICULESBU

643. — Se dă un cerc O, de rază R. Se duce diametrul AH prelungit cu o rază până în B. Din punctul A se duce o dreaptă AD astfel ca:

$$\sphericalangle DAB=30^0.$$

Tangenta în punctul A întâlnește tangenta dusă din B la cerc, în punctul G. Unim punctul G cu centru și prelungim până în C, punctul unde ducem altă tangentă. Să se demonstreze că:

1°. — Triunghiul BOG este isoscel. 2°. Patrulaterul $ABCG$ este un trapez isoscel. 3°. Dreapta GO este perpendiculară în I pe AD.

C. N. BALASESCU

644. — Dacă notăm:

$$\sqrt{a^2-4\,b}=k,$$

să se demonstreze că avem:

$$\frac{1}{(k-a)^3}-\frac{1}{(k+a)^3}=\frac{3\,a\,b-a^3}{8\,b^3}.$$

V. ALACI

645. — Fie ecuația:

$$x^2+p\,x+q=0,$$

cu rădăcinile:

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2},\quad \operatorname{cotg}\frac{\varphi_1}{2}.$$

Să se formeze ecuația ce admite ca rădăcini pe:

$$\sin\varphi\quad\text{și}\quad\sin\varphi_1.$$

AURELIAN I. STAN

646. — Să se demonstreze identitatea:

$$C_m^n=(C_m^n)^2-2C_m^{n-1}C_m^{n+i}+2C_m^{n-1}C_m^{n+2}+\ldots$$

$$\ldots+2(-1)^i\,C_m^{n-i}C_m^{n+i}+\ldots$$

$$\ldots+2(-1)^{2n-1}C_m^1C_m^{2n-1}+2C_m^{2n}.$$

N. I. MANOLESCU

INFORMATIUNI

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Legându-se colecţia R. M. T., anul V, în volum, şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

De asemenea se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu preţul de lei 80 volumul şi se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzători e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată şi să iscălească.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing.-Şef C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VII. 15 IULIE 1927 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. NICOLAE I. MANOLESCU. O METODA PENTRU AFLAREA SUMEI PUTERILOR ASEMENEA ALE UNEI PROGRESII ARITMETICE.
2. NOTE MATEMATICE, 8, 9.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 568, 580, 584, 587, 591, 593, 601, 602.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** —profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Adminstraţia Revistei, şi se poate procura în himibul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.
Anul VI, broşat, 80 lei.

ANUL VII — NO. 5. TIMISOARA, 15 IULIE 1927

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

O METODA PENTRU AFLAREA SUMEI PUTERILOR ASEMENEA ALE UNEI PROGRESII ARITMETICE

de NICOLAE I. MANOLESCU
Sc. Polit. Timișoara.

In cele ce urmează îmi propun să calculez, folosindu-mă de noțiuni elementare din calculul integral, suma puterilor unei progresii aritmetice cunoscând că:

$$(1)\quad x+(x+1)+\ldots+(x+n)=\frac{n+1}{2}(2x+n).$$

Pentru aceasta integrez expresiunea (1) în raport cu x dela 0 la x și avem:

$$\int_0^x[x+(x+1)+\ldots+(x+n)]\,dx=\frac{n+1}{2}\int_0^x(2x+n)dx$$

sau:

$$\frac{1}{2}\left[x^2+(x+1)^2+\ldots+(x+n)^2\right]-\frac{1}{2}[1^2+2^2+\ldots+n^2]=\frac{n+1}{2}(x^2+nx)$$

sau:

$$[x^2+(x+1)^2+\ldots+(x+n)^2]-[1^2+2^2+\ldots+n^2]=(n+1)(x^2+nx).$$

Mai integrând încăodată avem:

$$(2)\quad \frac{1}{3}[x^3+(x+1)^3+\ldots+(x+n)^3]-\frac{1}{3}[1^3+2^3+\ldots+n^3]-[1^2+2^2+\ldots+n^2]x=\frac{n+1}{6}(2x^3+3nx^2).$$

Făcând acum în (2) $x=1$ și simplificând obținem:

$$\frac{1}{3}(n+1)^3-[1^2+2^2+\ldots+n^2]=\frac{(n+1)(3n+2)}{6}$$

de unde:

$$\text{I.}\quad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

Pentru a găsi suma puterilor a 3^a a numerelor consecutive, pornim dela expresiunea (2) pe care o mai integrăm odată dela 0 la x, avem:

$$(3)\quad \frac{1}{12}[x^4+(x+1)^4+\ldots+(x+n)^4]-\frac{1}{12}[1^4+2^4+\ldots+n^4]-\frac{1}{3}[1^3+2^3+\ldots+n^3]x-\frac{1}{2}[1^2+2^2+\ldots+n^2]x^2=\frac{n+1}{12}(2nx^3+x^4),$$

și făcând și aci $x=1$, obținem:

$$\frac{1}{12}(n+1)^4-\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n}i^3-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{12}$$

și ținând seama de I avem:

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{1}{12}(n+1)^4-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12}$$

sau:

$$\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n+1}{4}(n^3+n^2)$$

deci:

$$\text{II}\qquad \sum_{i=1}^{n}i^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Putem deci să calculăm astfel suma puterilor k, fară însă să putem găsi o formulă generală, ci numai prin inducție.

Așa de exemplu dacă am voi să aflăm suma puterilor a 4^a pornim dela expresiunea (3) pe care integrând-o în raport cu x, dela 0 la x avem:

$$(4)\quad \frac{1}{60}\sum_{i=0}^{n}(x+1)^5-\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{n}i^5-\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}i^4x-$$

$$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}i^3x^2-\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}i^2x^3=\frac{n+1}{120}(5xn^4+2x^5)$$

și făcând $x=1$ obținem:

$$\frac{(n+1)^5}{60}-\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}i^4-\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}i^3-\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}i^2=$$

$$\frac{(n+1)(5n+2)}{120}$$

sau ținând seama de I și II avem:

$$\text{III}\quad 1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=$$

$$\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

și așa mai departe putem calcula și suma puterilor a 5^a, a 6^a etc.

Tot pe această cale am putea să calculăm suma puterilor asemenea a numerelor impare sau pare, pornind dela egalitatea:

$$(5)\quad x+(x+2)+\ldots+(x+2n)=(n+1)(x+n)$$

pe care o integrăm dela 0 la x avem:

$$\frac{1}{2}[x^2+(x+2)^2+\ldots+(x+2n)^2]-$$

$$\frac{1}{2}[2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2]=\frac{n+1}{2}(x^2+2nx)$$

sau:

$$(6)\quad x^2+(x+2)^2+\ldots+(x+2n)^2-$$

$$[2^2+4^2+\ldots+(2n)^2]=(n+1)(x^2+2nx).$$

Acum dacă în (6) facem $x=1$ obținem:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)^2-\sum_{i=1}^{n}(2i)^2=(n+1)(2n+1),$$

care puțin schimbată și adăugându-i relația (1) puțin simplificată, avem:

$$(\alpha)\quad \begin{cases}[1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2]-\\ \qquad[2^2+4^2+\ldots+4n^2]=-n(2n+1)\\ [1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2]+\\ [2^2+4^2+\ldots+4n^2]=\frac{1}{3}n(2n+1)(4n+1).\end{cases}$$

Rezolvând sistemul (α) în raport cu:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 \text{ și cu } \sum_{i=1}^{n}(2i)^2,$$

avem:

$$\text{IV}\quad 1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1$$

$$\text{V}\quad 2^2+4^2+6^2+\ldots+4n^2=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1).$$

Dacă în (6) mai integrăm încă odată în raport cu x dela 0 la x obținem:

$$\int_0^x[x^2+(x+2)^2+\ldots+(x+2n)^2]\,dx-$$

$$[2^2+4^2+\ldots+(2n)^2]\int_0^x dx=(n+1)\int_0^x(x^2+2nx)\,dx$$

sau:

$$\frac{1}{3}[x^3+(x+2)^3+\ldots+(x+2n)^3]-$$

$$\frac{1}{3}[2^3+4^3+\ldots+(2n)^3]-[2^2+4^2+\ldots+(2n)^2]x$$

$$=\frac{n+1}{3}(x^3+3nx^2),$$

sau:

$$(7)\quad [x^3+(x+2)^3+\ldots+(x+2n)^3]-$$

$$[2^3+4^3+\ldots+(2n)^2]-3[2^2+4^2+\ldots+(2n)^2]x$$

$$=(n+1)(x^3+3nx^2).$$

Făcând în (7) $x=1$ și ținând seamă de V avem:

$$[1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3]-[2^3+4^3+\ldots+(2n)^3]$$

$$=(n+1)(3n+1)+2n(n+1)(2n+1)$$

sau, care împreună cu II ne dă:

$$(\beta)\begin{cases}[1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3]-[2^3+4^3+\ldots \\ \quad\ldots+(2n)^3]=(n+1)^2(4n+1) \\ [1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3]+[2^3+4^3+\ldots \\ \quad\ldots+(2n)^3]=(n+2)^2(2n+1)^2.\end{cases}$$

Rezolvind sistemul (β) în raport cu:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)^3, \text{ şi } \sum_{i=1}^{n}(2i)^3$$

avem:

VI $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3+(2n+1)^3=(n+1)^2(2n^2+4n+1)$

VII $2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n-2)^3+(2n)^3=2[n(n+1)]^2$.

In felul acesta putem calcula mai departe pornind dela expresia (7).

Metoda este foarte simplă, prin faptul că nu aplicăm decât o simplă operaţie din calculul integral.

NOTE MATEMATICE

8. *Sur les triangles égaux homologiques inscrits à un même cercle.*

1. Soient A_1, B_1, C_1 les points de rencontre des transversales angulaires d'un point M pris dans le plan M d'un triangle ABC avec le cercle circonscrit. Nous nous proposons de trouver le point M dans l'hypothése que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont égaux et semblables.

En désignant par (L, M, N) et (α, β, γ) les coordonnées tripolaires et barycentriques du point M nous avons:

$$B_1C_1=\frac{a\Gamma}{MN}$$

$$C_1A_1=\frac{b\Gamma}{NL};\quad \Gamma=a^2\beta\gamma+b^2\gamma\alpha+c^2\alpha\beta$$

$$A_1B_1=\frac{c\Gamma}{LM}.$$

Par suite pour trouver les coordonnées tripolaires du point M il faut résoudre les systéme suivantes:

I $\dfrac{a\Gamma}{MN}=a$ $\quad\dfrac{b\Gamma}{NL}=b$ $\quad\dfrac{c\Gamma}{LM}=c$

II $\dfrac{a\Gamma}{MN}=b$ $\quad\dfrac{b\Gamma}{NL}=c$ $\quad\dfrac{c\Gamma}{LM}=a$

III $\dfrac{a\Gamma}{MN}=c$ $\quad\dfrac{b\Gamma}{NL}=a$ $\quad\dfrac{c\Gamma}{LM}=b$

IV $\dfrac{a\Gamma}{MN}=c$ $\quad\dfrac{b\Gamma}{NL}=b$ $\quad\dfrac{c\Gamma}{LM}=a$

V $\dfrac{a\Gamma}{MN}=a$ $\quad\dfrac{b\Gamma}{NL}=c$ $\quad\dfrac{c\Gamma}{LM}=b$

VI $\dfrac{a\Gamma}{MN}=b$ $\quad\dfrac{b\Gamma}{NL}=a$ $\quad\dfrac{c\Gamma}{LM}=c.$

En résolvant ces systémes, nous obtenons les coordonnées tripolaires des points cherchées.

I $1:1:1$ (le centre du cercle circonscrit) IV $\dfrac{c}{a}:1:\dfrac{a}{c}$

II $\dfrac{b}{a}:\dfrac{c}{b}:\dfrac{a}{c}$ V $1:\dfrac{c}{b}:\dfrac{b}{c}$

îII $\dfrac{c}{a}:\dfrac{a}{b}:\dfrac{b}{c}$ VI $\dfrac{b}{a}:\dfrac{a}{b}:1.$

On sait qu'il a deux points M dont les coordonnées tripolaires sont égaux[1]. Par suite, on peut construire les triangles égaux et homologiques à triangle donnée inscrits au cercle ABC.

N. AGRONOMOF
U. S. S. R. Vladivostok

9. *Asupra rezolvării algebrice a ecuaţiilor de gradul III şi IV.*

Sub rezolvarea algebrică a unei ecuaţii algebrice de grad oarecare se înţelege aflarea unei expresii explicite pentru câtimea necunoscută, în funcţie de coeficienţii ecuaţiei şi numai prin operaţiuni algebrice propriu zise. Aceste operaţiuni sunt cele patru operaţii fundamentale şi extragerea rădăcinelor de toate ordinile.

Sunt şi alte metode nealgebrice. că cele cu ajutorul funcţiunilor trigonometrice sau metodele lui *Hermite* şi *Kronecker* cu funcţiuni eliptice aplicabile la ecuaţia de gr. V.

Sunt multe procedeuri pentru rezolvarea ecuaţiunilor de gr. II, III, IV, aplicate de *Cardan, Gru-*

1) Pour (!, 1, 1) nous avons le point unique.

nert, Klebsch, Euler, Lagrange, Ferrari, Descartes, Ley, Francoeur, Schlömilch, Heilermann etc.

In acest loc am să arăt un metod, care întrece în simplicitate toate metodele cunoscute mie.

Ecuația de gradul III.

Se știe că o ecuație complectă de gr. III, cum a arătat *D. Radó*, în numărul 9, al *Revistei Matematice*, an. I, se poate reduce ușor la forma necomplectă.

(1) $$y^3 + 3py + 2q = 0.$$

Dacă eliminăm între (1) și derivata ei pe y, obținem condiția, ca discriminantul lui (1) să se anuleze. Adică eliminăm între (1) și:

(2) $$3y^2 + 3p = 0$$

pe y. Aceasta se face astfel: scădem pe (2) din (1) după ce am înmulțit cu $\frac{y}{3}$. Așa vom avea $2py + 2q = 0$, sau $y = -\frac{q}{p}$, pe care introducând-o în (2) obținem condiția $q^2 + p^3 = 0$.

Dacă considerăm în (1) coeficientul q ca variabil acest rezultat ne asigură, că funcțiunea ce exprimă pe y, conține o rădăcină patrată, care se anulează dacă $q^2 + p^3 = 0$.

Formăm acum o ecuație de gr. II, în care anularea radicalului e supusă aceleiaș condiții. Dacă ecuația este de forma $x^2 + 2rx + s = 0$, expresia rădăcinilor conține $\sqrt{r^2 - s}$. Dacă punem $r = q$, $s = -p^3$, obținem o ecuație de gr. II, a cărei rădăcină are același punct singular în q, sau cu alte cuvinte cele două ecuații au același discriminant. Având deci ecuația:

$$x^2 + 2qx - p^3 = 0,$$

eliminăm pe $2q$ între aceasta și (1), de unde rezultă:

$$y^3 + 3py + \frac{p^3 - x^2}{x} = 0.$$

Dacă substituim aci $x = z^3$, vom avea:

(3) $$y^3 z^3 + 3pyz^3 + p^3 - x^6 = 0,$$

ecuație, a cărei rădăcină nu conține nici un radical.

De altfel raționamentul bazat pe teoria funcțiunilor se poate înlătura spunând simplu, că am format o ecuație de grad inferior celei date care are același discriminant ca cea propusă.

După considerațiuni funcțional-teoretice simple, care de altfel nu sunt necesare, putem verifica, că (3) se descompune în trei factori în y lineari, din care evidențiăm numai unul, în modul următor:

(4) $$(yz - z^2 + p)[y^2 z^3 + y(z^3 - pz) + z^4 + pz^2 + p^2] = 0.$$

Din factorul $yz - z^2 + p = 0$, obținem:

(5) $$y = \frac{z^2 + p}{z} = z + \frac{p}{z} = \sqrt[3]{x} + \frac{p}{\sqrt[3]{x}},$$

ce ne dă toate rădăcinele ecuației (1) dacă x este o rădăcină oarecare a lui $x^2 + 2qx - p^3 = 0$, și dacă pentru $\sqrt[3]{x}$ se iau toate trei rădăcinele. Formula (5) are avantagiul, că numai odată e necesar, să extragem rădăcina cubică.

Ecuația de gradul IV.

Ea conține prea mulți coeficienți în general, ne mărginim deci la forma necomplectă:

(1′) $$y^4 + 4py + 3q = 0,$$

care se poate obține de exemplu cu metoda lui *Tschirnhausen* din forma complectă. Formând derivata ei și eliminând pe y între ea și (1′), găsim condiția $p^4 - q^3 = 0$, pentruca radicalul de ordinul II, să se anuleze.

Nu repet aci raționamentul urmat mai sus, ci spun numai, că ecuația:

(2′) $$x^3 + 3qx^2 - 4p^4 = 0,$$

are același discriminant, ca cea propusă. Eliminând între ele pe $3q$ și punând $x = z^2$ obținem ecuația;

$$y^4 z^4 + 4pyz^4 + 4p^4 - z^3 = 0,$$

care e identică cu următoarea:

(3′) $$(y^2 z^2 - 2pyz + z^3 + 2p^2)(y^2 z^2 + 2pyz - z^3 + 2p^2) = 0,$$

ce se poate demonstra prin efectuarea înmulțirii. Deci dacă obținem din (2′) o rădăcină x_1 și calculăm $z = \sqrt{x_1}$ d. ex. cu semnul + și în sfârșit înlocuim această valoare în ambii factori a lui (3′) egalați cu 0, scoatem cele 4 rădăcini ale lui (1′).

D. ex. fie $p = q = 1$, adică ecuația (1′) este: $y^4 + 4y + 3 = 0$, ecuația (2′) va fi $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$, ce admite o rădăcină $x_1 = 1$, deci luăm $z = 1$ și cei doi factori vor fi:

$$y^2 - 2y + 3 = 0 \quad \text{şi} \quad y^2 + 2y + 1 = 0.$$

Se ştie, că ecuaţia generală de gr. V deja nu se poate rezolva pur algebric, deci orice încercare de a extinde metoda expusă aci, ar fi zadarnică.

Pot, să adaug, că în cazul, dacă ecuaţia de gr. III are forma $y^3 + ry^2 + q = 0$, după metoda arătată mai sus, rădăcinele sunt date de:

$$y = \frac{3qx}{3x^2 - qr},$$

unde x este o rădăcină a ecuaţiei:

$$x^6 + q^2 x^3 - \left(\frac{qr}{3}\right)^3 = 0.$$

ERNEST CSILCSER
prof. lic. Diacnovici, Timişoara

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examen de fine de an

Lucrare scrisă de Geometrie Analitica, anul I

19 Iunie 1927

Seria I

a). Se dă o elipsă cu focarele în F, F′ şi cu axele A A′, B B′. O tangentă Δ variabilă la elipsă, întâlneşte în M paralela dusă prin B la axa mare A A′. Să se demonstreze că cercul F F′ M este tangent în M la Δ.

b). Se cere ecuaţia unui con cu vârful în punctul (1, 2, 3), şi cu directoarea:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 3x - y + 2z = 17.$$

Seria II

a). Prin punctul P (a, b) se duce o dreaptă care taie axele în A $(\alpha, 0)$, B $(0, \beta)$. Se cere: 1) Să se demonstreze că prin punctul P trec două drepte aşa în cât:

$$\alpha + \beta = k$$

în care k este constant.

2). Să se caute în plan poziţiile lui P aşa ca cele 2 drepte să fie reale, apoi să se caute locul lui P pentru ca ele să fie perdendiculare.

b). Să se afle generatoarele rectilinii ale suprafeţii:

$$x^2 - 2y^2 + z^2 = 1.$$

Seria III

a). Fie P_1 şi P_2 două parabole care au acelaşi focar O şi aceiaşi axă O x. Fie D_1 şi D_2 directoarele celor 2 parabole şi Δ o dreaptă paralelă cu D_1 şi D_2 şi trecând prin mijlocul distanţei dintre cele 2 directoare. Se consideră un punct M mobil pe Δ din care se duc tangentele M A_1 M B_1 la P_1 şi M A_2, M B_2 la P_2, Să se arate că $A_1 B_2$ şi $A_2 B_1$ trec prin O.

b). Se cere ecuaţia cilindrului ale cărui generatoare au direcţiile (1, 0, 1), directoarea fiind curba:

$$z - 1 = 0, \quad x^2 - 2y^2 + 1 = 0.$$

Seria IV

a). Se cere ecuaţia parabolelor (P) care trec prin un punct fix O şi admit o directoare Δ. Care este locul geometric al focarului F al acestor parabole? Dreapta O F taie parabola (P) în M. Să se arate că M descrie o parabolă (P′) tangentă în M la (P).

b). Se dă un plan P, o perpendiculară Δ pe el şi o sferă S tangentă la Δ. Prin fiecare punct A al dreptei Δ se duce la S o tangentă paralelă cu P. Se cere ecuaţia suprafeţei descrisă de această tangentă.

Seria V

a). Se consideră cercurile (C) care trec prin un punct fix O şi cu centrele pe o dreaptă fixă O y. Unul din aceste cercuri întâlneşte o dreaptă fixă în M şi M′ Se cere locul centrului cercului care trece prin M şi M′ şi este ortogonal lui (C).

b). Fie M un punct mobil pe o dreaptă Δ şi A, B, C proecţiile lui M pe 3 axe O x, O y, O z. Se cere ecuaţia sferei O A B C.

Seria VI

a). Se dă o parabolă cu vârful în O şi focarul F. Se ia pe O F un punct P a cărui abscisă este dublul abscisei lui F. Perpendiculara în P pe O F taie parabola în M. Normala în M la parabolă întâlneşte a doua oară parabola în M′, iar directoara în L. Să se arate că segmentele M M′, M L sunt într'un raport dat.

b). Să se scrie ecuaţia conului cu vârful în (0, 0, 1) şi cu baza:

$$z = 0, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXII, No. 9, Iunie 1927. Matematicele pure şi aviaţiunea, de *Ştefan Mirea*. Asupra unei ecuaţiuni diferenţiale, de *R. T. Ianculescu*. Rezultatul concursului „*Gazetei Matematice*“, din anul 1927, de *G. Ţiţeica*.

2. *Curierul Matematic*, vol. III, No. 4, Iunie 1927. Asupra diviziunii polinoamelor, de Sublocot. *M. Focşeneanu.*

3. *Mathematical statistic*, By *Henry Lewis Rietz*, professor of mathematics, the University of *Iova* (180 pag.)

4. *N. Agronomof.* Sur la transformation de l'équation générale d'une courbe du second ordre (4 pag.)

5. *N. Agronomof.* Sobre algunos cuestiones de análisis indeterminado (4 pag.)

6. *N. Agronomof.* Sobre una función numérica (4 pag.)

7. *N. Agronomof.* Notas complementarias sobre la función S (N), (6 pag.)

8. *N. Agronomof.* Sur un théoréme de *Laguerre* (5 pag.)

9. *N. Agronomof.* Sur un probléme de la construction (3 pag.)

PROBLEME REZOLVATE

568. — *Să se calculeze expresiunea:*

$$E = \frac{P_1}{P_2},$$

în care:

$$P_1 = \sin p\alpha - 2x \sin 2p\alpha + 3x^2 \sin 3p\alpha - \dots$$

$$P_2 = \cos p\alpha - 2x \cos 2p\alpha + 3x^2 \cos 3p\alpha - \dots$$

iar; $x < 1$.

RAPEANU N. VIRGIL

Pentru a calcula P_1 şi P_2, vom considera progresiile geometrice descrescătoare:

$$A = 1 + x\cos p\alpha - x^2 \cos 2p\alpha + x^3 \cos 3p\alpha - \dots$$

$$B = x \sin p\alpha - x^2 \sin 2p\alpha + x^3 \sin 3p\alpha - \dots$$

care derivate în raport cu x ne dau respectiv P_2 şi P_1.

Multiplicând relaţia 2^a cu $i(i=\sqrt{-1})$ şi adunând cu prima, avem:

$$A + iB = 1 + x(\cos p\alpha + i \sin p\alpha) - x^2(\cos 2p\alpha + i \sin 2p\alpha) + x^3(\cos 3p\alpha + i \sin 3p\alpha) + \dots$$

Dacă notăm:

$$\cos p\alpha + i \sin p\alpha = \lambda,$$

atunci ţinând seama de formula lui *Moivre*, putem, scri:

$$A + iB = 1 + \lambda x - \lambda^2 x^2 + \lambda^3 x^3 - \dots = \frac{1}{1+\lambda x} = \frac{1}{1 + x\cos p\alpha + ix \sin p\alpha}$$

având o progresie geometrică descrescătoare.

Mai putem scri:

$$A + iB = \frac{1}{1 + x\cos p\alpha + ix \sin p\alpha} =$$

$$\frac{1 + x\cos p\alpha - ix \sin p\alpha}{(1+x\cos p\alpha)^2 + x^2 \sin^2 p\alpha} = \frac{1 + x\cos p\alpha - ix \sin p\alpha}{x^2 + 2x\cos p\alpha + 1}$$

De aci deducem:

$$A = \frac{1 + x\cos p\alpha}{x^2 + 2x\cos p\alpha + 1}, \quad B = -\frac{x \sin p\alpha}{x^2 + 2x\cos p\alpha + 1}$$

Derivând aceste relaţiuni în raport cu x, obţinem:

$$A' = P_2 =$$

$$\frac{\cos p\alpha(x^2 + 2x\cos p\alpha + 1) - (2x + 2\cos p\alpha)(1 + x\cos p\alpha)}{(x^2 + 2x\cos p\alpha + 1)^2}$$

$$= \frac{-x^2 \cos p\alpha - 2x - \cos p\alpha}{(x^2 + 2x\cos p\alpha + 1)^2}$$

$$B' = P_1 = -$$

$$\frac{\sin p\alpha(x^2 + 2x\cos p\alpha + 1) - (2x + 2\cos p\alpha)x \sin p\alpha}{(x^2 + 2x\cos p\alpha + 1)^2}$$

$$= \frac{\sin p\alpha(x^2 - 1)}{(x^2 + 2x\cos p\alpha + 1)^2}.$$

Urmează că:

$$\frac{P_1}{P_2} = -\frac{\sin p\alpha(x^2 - 1)}{\cos p\alpha(x^2 + 1) + 2x} = \frac{(1 - x^2)\sin p\alpha}{(1 + x^2)\cos p\alpha + 2x}$$

Aceasta este expresiunea cerută.

Soluţii date de d-nii: *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare) şi *Vlădea Ioan* (Şc. Polit., Timişoara).

580. — *Un ceasornic are trei ace, care ne dau respectiv numărul orelor, minutelor şi secundelor, ele arată ora 1. Peste cât timp unul din ace va fi bisectoarea unghiului format de celelalte două.*

BESCHEA NICOLAE

La ora 1, orarul este în dreptul lui 1, minutarul şi secundarul în dreptul lui 12.

1°. *Cazul când secundarul este bisectoarea unghiului format de celelalte două ace.*

Fie x arcul în grade descris de orar, el va fi depărtat de 12 cu arcul $30^0 + x$. In acest timp, minutarul care se mişcă de 12 ori mai repede, va

descrie un arc de $12x$ grade, iar secundarul care se mișcă de 60 ori mai repede ca minutarul va descrie un arc de, $60 \times 12x = 720x$ grade.

Unghiul făcut de orar și minutar este:

(1) $$30 + x - 12x.$$

Arcul descris de secundar, trebuie să fie egal cu cel descris de minutar ($12x$), mărit cu jumătatea unghiului (1), deci:

$$720x = 12x + \frac{30 + x - 12x}{2}$$

$$\therefore \quad 1427x = 30^0,$$

deci:

$$x = \frac{30^0}{1427}.$$

Dar 30^0 fac $1^{\text{oră}} = 60^m = 3600^s$, atunci:

$$x = \frac{3600}{1427} = 2^s\,\frac{746}{1427}.$$

La ora: 1^o, 5^m, $2^s\,\frac{746}{1427}$ secundarul este bisectoarea unghiului format de celelalte două ace.

2°. *Cazul când orarul este bisectoarea unghiului format de celelalte două ace.*

Ca și în primul caz, dacă x este arcul descris de orar, $12x$ și $720x$ sunt arcele descrise de minutar și secundar în același timp. Unghiul făcut de minutar și secundar este:

$$720x - 12x,$$

iar cel făcut de orar și secundar este:

$$30 + x - 12x.$$

Conform enunțului trebuie să avem:

$$720x - 12x = 2(30 + x - 12x),$$

sau:

$$730x = 60^0$$

$$\therefore \quad x = \frac{60^0}{730}.$$

Dar 60^0 fac $2^{\text{ore}} = 120^m = 7200^s$, deci:

$$x = \frac{7200}{730} = \frac{720}{73} = 9^s\,\frac{63}{73}.$$

La ora 1^o, 5^m, $9^s\,\frac{63}{73}$, orarul este bisectoarea unghiului format de celelalte două ace.

3°. *Cazul când minutarul este bisectoarea unghiului format de celelalte două ace.*

Ca și în cazurile de mai sus, dacă x este arcul descris de orar, $12x$ și $720x$ sunt arcele descrise de minutar și secundar. Unghiul făcut de minutar și orar este:

$$30 + x - 12x.$$

Unghiul dela stânga minutarului, care s'a deplasat cu $12x$, este:

$$360^0 - 720x + 12x.$$

Conform enunțului trebue să avem:

$$30 + x - 12x = 360 - 720x + 12x,$$

sau:

$$697x = 330^0$$

$$\therefore \quad x = \frac{330^0}{697}.$$

Dar 330^0 fac $11^{\text{ore}} = 660^m = 39600^s$, deci:

$$x = \frac{39600}{697} = 56^s\,\frac{568}{697}.$$

La ora 1^o, 5^m, $56^s\,\frac{568}{697}$ minutarul este bisectoarea unghiului format de celelalte două ace.

Soluții date de d-nii: *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați) și *Novacu Valeriu* (lic, Arad).

Au soluționat numai primul caz, d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Goldenstein Eleazare* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Goldstein G. A.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Hampartium R. Grigore* (lic. Constanța), *Iancu H. David* (lic. National, Iași), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Robu Ioncl* și *Stoica Aurel* (București).

Observări. 1°. D-l *Novacu Valeriu,* arată că o o problemă asemănătoare se găsește în *Algèbre,* F. G. M., pag. 119.

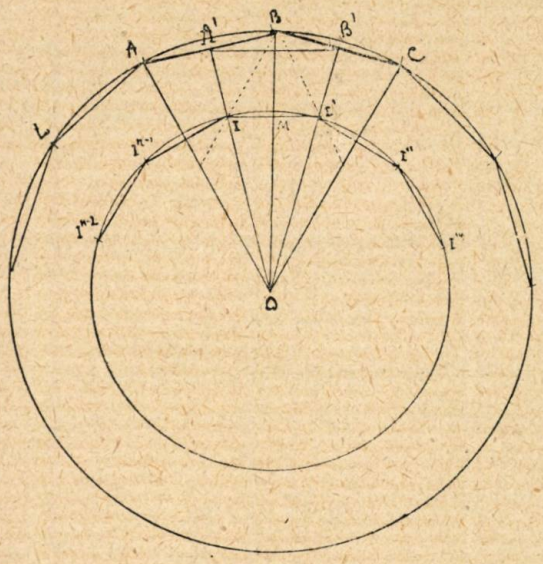
2°. S'au primit multe soluții greșite.

584*. — *Se dă poligonul regulat* A B C,..K L *înscris într'un cerc* O.

1°. Să se demonstreze că centrele cercurilor înscrise triunghiurilor A O B, B O C,...K O L *sunt vârfurile unui poligon regulat.*

2°. Să se calculeze suprafața acestui poligon cunoscând latura poligonului dat.

V. ALACI



1°. Fie A B C ... L poligonul de n laturi dat. Evident că triunghiurile isoscele A O B, B O C, ... L O A sunt egale şi centrele cercurilor înscrise se găsesc pe înălţimele lor duse din O şi la aceiaşi distanţă de O, căci oricare două din aceste triunghiuri se suprapun. Rezultă că centrele I, I', I'', ... I^{n-1} se găsesc pe acelaşi cerc. Observând apoi că poligonul A' B' ... fiind regulat, urmează că şi poligonul $II' \ldots I^{n-1}$ este regulat, având laturile lor proporţionale:

$$\frac{II'}{A'B'} = \frac{I'I''}{B'C'} = \ldots = \frac{OI}{OA'}.$$

Poligonul $II' \ldots I^{n-1}$ este deci regulat.

2°. Să trecem la partea a doua a problemei să calculăm suprafaţa poligonului $II'I'' \ldots I^{n-1} = S$, în funcţie de latura a, a poligonului A B ... L de n laturi. Calculăm întâi suprafaţa poligonului A B ... $L = S_1$ în funcţie de a, avem însemnând cu p perimetrul şi α apotema:

$$S_1 = \frac{p\,\alpha}{2} = \frac{n\,a\,\alpha}{2}.$$

Dar din triunghiul dreptunghic A' O B. avem:

$$OA' = \alpha = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n},$$

astfel că:

$$(1) \qquad S_1 = \frac{n\,a^2\cot\frac{\pi}{n}}{4}.$$

Acum aplicăm teorema: *Raportul suprafeţelor a două poligoane regulate de acelaşi număr de laturi, este egal cu raportul între patratele razelor lor,* putem deci scri:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\overline{OI}^2}{\overline{OB}^2},$$

$$(2) \qquad \therefore \quad S = \frac{\overline{OI}^2}{\overline{OB}^2} S_1.$$

Calculăm acum pe O I. Insemnând cu r raza cercului înscris în triunghiul A O B, avem:

$$OI = OA' - r = \alpha - r.$$

Suprafaţa lui A O B se poate scrie în două moduri:

$$(AOB) = \frac{(2\,OB + a)\,r}{2} = \frac{a\,\alpha}{2},$$

$$\therefore \quad r = \frac{a\,\alpha}{2\,OB + a},$$

dar:

$$OB = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}},$$

atunci:

$$r = \frac{a\,\alpha}{\frac{a}{\sin\frac{\pi}{n}} + a} = \frac{\alpha\sin\frac{\pi}{n}}{1 + \sin\frac{\pi}{n}}.$$

Rezultă:

$$OI = \alpha - \frac{\alpha\sin\frac{\pi}{n}}{1 + \sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\alpha}{1 + \sin\frac{\pi}{u}}.$$

Inlocuind în (2) valorile găsite pentru O I, O B şi S_1, avem:

$$S = \frac{\frac{\alpha^2}{\left(1 + \sin\frac{\pi}{n}\right)^2}}{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}} \cdot \frac{n\,a^2\cot\frac{\pi}{n}}{4} =$$

$$\frac{n a^2 \cot\frac{\pi}{n} \sin^2\frac{\pi}{n}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^2} = \frac{n a^2 \cot^3\frac{\pi}{n} \sin^2\frac{\pi}{n}}{4\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot n a^2 \cot\frac{\pi}{n} \cdot \left(\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2,$$

sau:

$$S = \frac{1}{4} n a^2 \cot\frac{\pi}{n} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right).$$

Soluții parțiale date de d-nii: *Bârs D. Petre*, *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, București), *Both Ioan* (Gherla), *Dănciulescu Virgil* (lic. Buzești, Craiova), *Drăgan G.* (Șc. Polit., Timișoara), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic, Calați), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iași), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Patron Th. N.* (lic. Milit., Iași), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu N. Ioan* (Cluj), *Stan I. Aurelian* (lic Milit., Iași), *Stan C.* (lic. Roman), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Tomescu Valeriu* (lic. Lazăr, București), *Vasilescu Bartolomeu* (București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare), *Vlădea Ioan* (Șc. Polit., Timișoara) și *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori, Chișinău).

587. — *Să se găsească patratele perfecte de forma a b b c, unde a și c sunt cifre consecutive.*

EUGEN ST. IACOB

Ultimele două cifre ale unui patrat perfect fiind:

00, 01, 04, 09, 16, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96,

patratele perfecte de forma $a b b c$ în care a și c sunt consecutive, pot fi:

3004, 8009, 5116, 3224, 4225, 8229, 5336, 3444, 8449, 5556, 3664, 8669, 5776, 3884, 8889, 5996, dacă $a < c$, și: 1000, 2001, 5004, 7116, 5224. 6225, 7336, 2441, 5444, 7556, 2661, 5664, 7776, 2881, 5884, 7996, dacă $a > c$.

Dintre acestea, numerile: 8229, 3444, 5556, 8889, 2001, 7116, 6225, 2661, 5664 fiind divizibile cu 3 fără a fi și cu 9, nu's patrate perfecte.

Dintre numerile rămase numai 4225, și 5776, sunt patrate perfecte:

$$4225 = 65^2,\ 5776 = 76^2$$

care formează soluțiile problemei.

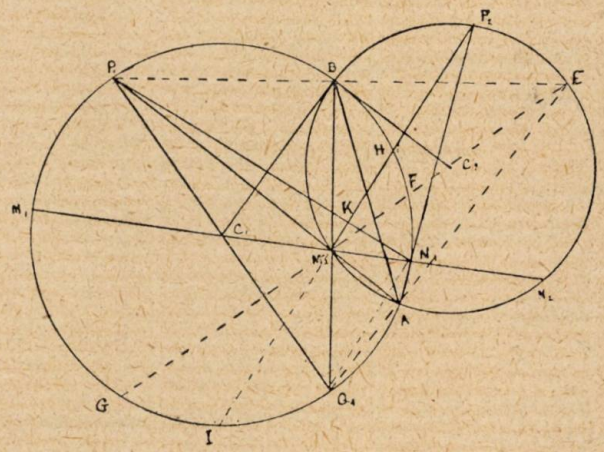
Soluții date de d-nii: *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Cola Sebastian* (lic. Buzești, Craiova), *Müller C. Gheorghe* (lic. Pitești), *Pantazi Alexandru* (lic. Galați), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Procopescu St. Nestor* (lic. Caracal) și *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

591*. — *Fie* A B *coarda comună a două cercuri* C_1 *și* C_2, *ortogonale. Diametrul variabil* $M_1 N_1$ *din* C_1, *taie pe* C_2 *în* M_2 *și* N_2. *Dreptele* $A M_2$ *și* $B M_2$ *taie pe* C_1 *în* P_1 *și* Q_1, *iar dreapta* $A N_1$ *taie pe* C_2 *în* P_2, *să se arate că:*

1°. Dreapta $P_1 Q_1$ *trece printr'un punct fix, când diametrul* $M_1 N_1$ *variază.*

2°. Dreptele $N_1 P_1$ *și* $M_2 P_2$, *se taie sub un unghiu drept.*

AUGUST COMAN



1°. Egalând măsurile unghiului $Q_1 M_2 P_1$ considerat în cercul C_1 și C_2, avem:

$$(1)\quad \text{măs.}\ \frac{\overset{\frown}{P_1 M_1 Q_1}}{2} + \text{măs.}\ \frac{\overset{\frown}{A N_1 B}}{2} = \text{măs.}\ \frac{\overset{\frown}{A N_2 B}}{2}.$$

Insemnând:

$$\sphericalangle A C_1 B = \sphericalangle C_1$$
$$\sphericalangle A C_2 B = \sphericalangle C_2,$$

și observând, că:

$$\text{măs.}\ \frac{\overset{\frown}{A N_1 B}}{2} = \frac{\hat{C}_1}{2},\quad \text{măs.}\ \frac{\overset{\frown}{A N_2 B}}{2} = \pi - \frac{\hat{C}_2}{2}$$

relația (1) devine:

$$\text{măs.}\ \frac{\overset{\frown}{P_1 M_1 Q_1}}{2} = \pi - \frac{\hat{C}_1 + \hat{C}_2}{2}.$$

Cercurile C_1 și C_2 fiind ortogonale:

$$\hat{C}_1 + \hat{C} = \pi,$$

rezultă:

$$\text{măs.}\ \frac{\overset{\frown}{P_1 M_1 Q_1}}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Prin urmare $P_1 Q_1$ trece printr'un fix, centrul cercului C_1, f ind un diametru.

2°. Observăm că:

$$\sphericalangle Q_1 N_1 A = \sphericalangle Q_1 B A,$$

având aceiași măsură, $\frac{\overset{\frown}{A Q_1}}{2}$.

De altă parte:

$$\sphericalangle Q_1 B A = \sphericalangle M_2 P_2 A,$$

având aceiași măsură, $\frac{\overset{\frown}{A M_2}}{2}$.

Rezultă, că:

$$\sphericalangle Q_1 N_1 A = \sphericalangle M_2 P_2 A,$$

deci dreptele $M_2 P_2$ și $Q_1 N_1$ sunt paralele.

Apoi observăm, că:

$$\sphericalangle P N_1 Q_1 = 90^0,$$

rezultă că și:

$$\sphericalangle P_1 K M_2 = 90^0,$$

Dreptele $N_1 P_1$ și $M_2 P_2$ se taie deci sub un unghiu drept.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Er.* (lic. P.-Neamț), *Botea G Emil* (lic. Cantemir, București), *Costăchescu V. C.* (lic. milit., Iași), *Iancu H. David* (lic. Național, Iași), *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova), *Lepădatu I. Miclea, Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iași), *Mărculescu I. Origen* (lic. Carol, Craiova), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr București), *Patron Th. N* (lic. Milit., Iași), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Solnițaru V. Nicolae* (lic. Pitești), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare) și *Zagaican Ilie* (Șc. de Cond., Chișinău).

593. — *In orice triunghiu, expresia:*

$$\sum \frac{R\,(a+b)\cos C \,.\, h_a}{p\,b\,c}$$

este constantă, notațiile fiind cele obicinuite.[1]

CRAIU N. ION

1) Enunț rectificat.

Folosind relațiile cunoscute:

$$h_a = \frac{2s}{a}, \quad a\,b\,c = 4\,R\,s,$$

putem scri:

$$(1)\quad \sum \frac{R\,(a+b)\cos C\, h_a}{p\,b\,c} = \frac{2\,s\,R}{p\,a\,b\,c} \sum (a+b)\cos C$$

$$= \frac{R\,s\,2}{4\,p\,R\,s} \sum (a+b)\cos C = \frac{1}{2\,p} \sum (a+b)\cos C.$$

De altă parte, adunând relațiile cunoscute:

$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$b = a\cos C + c\cos A$$

$$c = a\cos B + b\cos A,$$

avem:

$$(a+b)\cos C + (b+c)\cos A + (c+a)\cos B = a+b+c$$

sau:

$$\sum (a+b)\cos C = 2p.$$

In virtutea acestei egalități, relația devine:

$$\sum \frac{R\,(a+b)\cos C \,.\, h_a}{p\,b\,c} = \frac{1}{2\,p}\, 2\,p = 1.$$

Expresia dată este deci constantă.

Soluții date de d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic Buzești, Craiova), *Florea I. Mircea* (lic. Bacău), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați) și *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare).

601. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum \frac{a\,r_b^2\,r_c^2 \cot\frac{A}{2}}{(r_a - r_b)(r_a - r_c)} - \sum \frac{a\,r_a^2 \cot\frac{A}{2}}{(r_a - r_b)(r_a - r_c)} = 4\,R\,p^2$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

ALEXANDRU PODARIU

Vom folosi următoarele identități, din articolul: *„Identități algebrice deduse cu ajutorul calculelor de algebră elementară“*, R. M. T., an. V, pag. 68 — 69:

$$(1)\quad \sum \frac{\gamma^2\beta^2(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

$$(2)\quad \sum \frac{\alpha^2(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = 0.$$

Scăzând relaţia (2) din (1) şi în urmă înlocuind:

$$\alpha = r_a, \quad \beta = r_b, \quad \gamma = r_c,$$

obţinem:

$$(3) \quad \sum \frac{r_b^2 r_c^2 (r_b + r_c)}{(r_a - r_b)(r_a - r_c)} - \sum \frac{r_a^2 (r_b + r_c)}{(r_a - r_b)(r_a - r_c)} = (r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a).$$

Ţinând seamă apoi, că:

$$(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) =$$

$$\left(\frac{s}{p-a} + \frac{s}{p-b}\right)\left(\frac{s}{p-b} + \frac{s}{p-c}\right)\left(\frac{s}{p-c} + \frac{s}{p-a}\right)$$

$$= \frac{s^3 a b c}{(p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2} = \frac{p^2 s^3 a b c}{s^4} =$$

$$\frac{p^2 a b c}{s} = 4 R p^2,$$

şi:

$$r_b + r_c = (p-c)\cot\frac{A}{2} + (p-b)\cot\frac{A}{2} = a\cot\frac{A}{2},$$

relaţia (3) devine:

$$\sum \frac{a r_b^2 r_c^2 \cot\frac{A}{2}}{(r_a - r_b)(r_a - r_c)} - \sum \frac{a r_a^2 \cot\frac{A}{2}}{(r_a - r_b)(r_a - r_c)} = 4 R p^2$$

adică tocmai identitatea cerută.

Soluţii date de d-nii: *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, Bucureşii), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Roman I. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Steblea Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Stoica Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti) şi *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare).

602. — *Să se construiască triunghiul dreptunghiu în care există relaţia:*

$$\sin^2 C = \sin B.$$

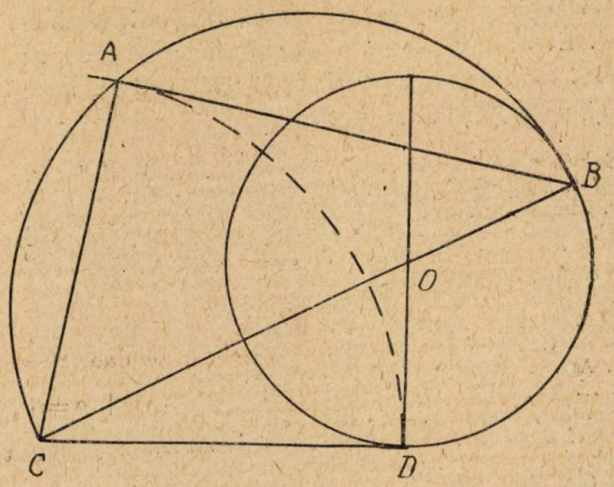
TRAIAN BEJU

Multiplicăm relaţia dată cu a^2, avem:

$$(1) \quad a^2 \sin^2 C = a^2 \sin B.$$

Ţinând seamă că într'un triunghiu dreptunghiu, avem:

$$a \sin C = c, \quad a \sin B = b, \quad c^2 = a^2 - b^2,$$



relaţia (1) devine:

$$c^2 = a b,$$

$$a^2 - b^2 = a b,$$

$$\therefore \quad a^2 - a b - b^2 = 0,$$

adică:

$$a = \frac{b + \sqrt{5 b^2}}{2}.$$

Pentru a vom lua numai soluţia pozitivă:

$$a = b\frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Luând pe b după voie, a afla pe a revine a împărţi în medie şi extremă a raţiei, un segment dat b. Vom proceda astfel:

In punctul D a unui segment dat $CD = b$, construim un cerc de diametru CD şi tangent lui CD; apoi unim C cu O centrul cercului şi prelungim C până întâlneşte cercul în B. Rezultă că:

$$CB = a,$$

căci:

$$b^2 = CB(CB - b),$$

sau:

$$\overline{CB}^2 - b \cdot \overline{CB} - b^2 = 0.$$

Având ipotenuza a şi o catetă, triunghiul ABC se poate construi uşor. Pentru a face construcţii mai puţine, vom descri un semicerc pe CB, pe

care îl vom tăia cu un arc de cerc descris din C cu CD ca rază, avem astfel vârful A.

Triunghiul dreptunghic ABC, răspunde problemei. Evident că toate triunghiurile asemenea cu ABC răspund problemei căci relaţia dată între unghiurile B şi C se păstrează.

Soluţii date de d-nii: *Beju Traian* (lic. Arad), *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dimitriu Gh. Ştefan* (lic. Milit., Iaşi), *Dumitrescu Eugen* (lic. Buzău), *Cheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Hoepfner V.* (lic. Câmpina), *Iancu H. David* (lic. Naţional, Iaşi), *Lepădatu I. Miclea*, *Manolescu I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iaşi), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nichita C. Aurel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Patron Th. N.* (lic. Milit, Iaşi), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Savu C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Scarlat V. D.* (lic. Câmpina), *Şoimulescu I.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Triculescu R. Ioan* (lic. Buzeşti, Craiova), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare), *Weintraub Mandy* (lic. Lazăr, Bucureşti) şi *Zugrăescu Ioan* (lic. Braşov).

PROBLEME PROPUSE

647. — Patratele a două numere pare consecutive au forma $abcde$, $abfde$. Se cer acele numere.

POPESCU C VIRLGILIU.

648. — Se cere un patrat perfect $abcd$, astfel ca:

$$acd = d^3$$
$$cdb = (b + d - a)^2$$

COSNITA CEZAR

649. — Se dau punctele A, B, C. Să se găsească în planul lor un punct D, astfel ca unghiul ADB să aibă o mărime dată, iar bisectoarea unghiului său adiacent suplimentar să treacă prin C.

RADULESCU C. M.

592[1]. — Se construeşte un triunghiu $A_1B_1C_1$ ale cărui vârfuri se găsesc pe bisectoarele interioare AI, BI, CI ale unui triunghiu dat ABC şi ale cărui laturi A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 sunt paralele respectiv cu bisectoarele exterioare ale unghiurilor C, A, B ale triunghiului ABC. Se construeşte din $A_1B_1C_1$ un triunghiu $A_2B_2C_2$ după cum s'a construit $A_1B_1C_1$ din ABC. Şi aşa mai departe, se obţin triunghiurile $A_3B_3C_3, \ldots A_iB_iC_i$. Să se demonstreze că triunghiul $A_iB_iC_i$ este echilateral atunci când i este infinit de mare.

COL. GH. BUICLIU

650. — Se dau ecuaţiile:

$$x^2 + px + q = 0,\ x^2 + p_1x + q_1 = 0,$$

cu rădăcinele respectiv x_1, x_2; x', x''.

Să se formeze ecuaţia:

$$X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d = 0,$$

ale căror rădăcini sunt:

$$X_1 = x_1 + x_2 + x',\ X_2 = x_1 + x_2 + x'',$$
$$X_3 = x' + x'' + x_1,\ X_4 = x' + x'' + x_2.$$

COSTACHESCU V. C-TIN

651. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 5 \\ z^3 - y^3 = 19 \\ y^5 + x^2y^3 + (10x^2 - z^3)y^2 = x^2z^3 - 55. \end{cases}$$

PISPIRIS D. GHEORGHE

652. — Să se arate că în orice triunghiu, avem relaţia:

$$\sum \frac{3(a^2 - b^2) - ac}{ac} + 3\sum \sin C \cot A = 12 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

V. ALACI

653. — Dacă ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c sunt razele cercurilor cu centrele în O_a, O_b, O_c tangente interior la câte două din laturile triunghiului ABC şi la cercul înscris cu centrul în I şi cu raza r, să se demonstreze că:

1°. $$\frac{1}{\sqrt{\varrho_a}} + \frac{1}{\sqrt{\varrho_b}} + \frac{1}{\sqrt{\varrho_c}} = \sqrt{r}\sum \operatorname{cotg} \frac{\pi - a}{4}$$

2°. $$\frac{IO_a - \varrho_a}{IO_b - \varrho_b} + \frac{IO_b - \varrho_b}{IO_c - \varrho_c} + \frac{IO_c - \varrho_c}{IO_a - \varrho_a} = 3.$$

GH. GH. VASILIU

1) Problema 592, propusă la pagina 142, Vo.. VI, având enunţul eronat se publică din nou cu rectificarea cuvenită.

INFOMATIUNI

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Legându-se colecţia R. M. T., anul V, în volum, şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

De asemenea se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu preţul de lei 80 volumul şi se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzători e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată şi să iscălească.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing.-Şef C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VII. 15 AUGUST 1927 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. † REGELE FERDINAND I, FĂURITORUL ROMÂNIEI MARI A MURIT.
2. VIRGIL COȘNIȚĂ ASUPRA UNEI CONICE.
3. NOTE MATEMATICE, 10.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. CONCURSUL REVISTEI MATEMATICE DIN TIMISOARA
6. PROBLEME REZOLVATE: 572, 583, 585, 603, 604, 614, 615.
7. PROBLEME PROPUSE.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Adminstraţia Revistei, şi se poate procura în himibul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.
Anul VI, broşat, 80 lei.

---

† FERDINAND I

REGELE ROMÂNIEI

1914—1927

ANUL VII — NO. 6. TIMISOARA, 15 AUGUST 1927

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

† REGELE FERDINAND I, FĂURITORUL ROMÂNIEI MARI A MURIT

In fața mormântului Său un popor întreg îndurerat de pierderea celui mai bun fiu își pleacă fruntea și se roagă pentru o d i h n a sufletului Aceluia care ne-a dat exemplul unor înalte virtuți naționale.

Venit în țară la 1889 pentru a se împlini litera legii noastre constituționale, Principele Ferdinand, fiul lui Leopold de Hohenzolern și deci nepotul defunctul rege Carol I, al României, se leagă de poporul român pe care îl iubește cu atât mai vârtos cu cât îl cunoaște mai bine.

Astfel moartea Regelui Carol I, îl găsește pregătit sufletește. La 14 Octombrie 1914 depunând jurământul de credință ca Rege nou în fața Națiunii reprezentată prin Parlament, sigilează sentimente crescute în mod normal și-Și angajează pentru totdeauna mintea și energia pentru binele unei Țări care-i era dragă și care era a Lui.

De pe caerul vremii evenimente din ce în ce mai hotărîtoare pentru soarta neamului își desfac firul, până când în August 1916 Regele Ferdinand intră cu armata Sa în focul cel mare al Războiului, dând dovada strălucitelor Sale calități de bun Român și arătând pildă de tărie în împlinirea datoriei, tuturor celor care șovăiau între interese personale și binele neamului.

Desfășurarea ulterioară a marilor întâmplări ne-a răsplătit cu prisosință, Rege și Popor. Granița țării noastre a fost mutată acolo unde dreptatea istorică și etnică trebuia să o așeze, iar Regele Ferdinand I, Și-a bine meritat numele de ctitor al României Mari.

Ca o încununare a marei epopei, Regele Ferdinand mută centrul de greutate al puterei politice și economice în Stat în favoarea masselor adânci ale poporului, prin acordarea votului obștesc și prin împroprietărirea țăranilor răsplătind pe cei care s'au jertfit și au pătimit pentru apărarea și mărirea Patriei.

Mișcarea intelectuală îi datorește încurajarea regală prin susținerea morală și ajutorarea materială a mai tuturor instituțiilor savante din țară. In timpul din urmă Regele Ferdinand a înființat o „Fundație universitară“ la Iași, destinată să ușureze studențimii ieșene drumul spre lumină.

Astfel în scurta Sa Domnie de 12 ani Regele Ferdinand a știut să fie Mare prin sacrificiul de Sine și prin neclintita Sa iubire de Țară.

Fie ca pilda vieței Sale să ne slujească de îndreptar luminos în calea desvoltării Națiunii noastre.

ASUPRA UNEI CONICE

de VIRGIL COSNITA

1. In cele ce urmează voesc să studiez următoarea proprietate cunoscută:

Locul focarelor conicelor înscrise într'un patrulater dat, este o cubică circulară, trecând prin cele şase vârfuri ale patrulaterului. La această problemă se cunoaşte soluţia d-lui *Lippmann* şi a lui *Salmon* (A se vedea *Géométrie Analitique" Niewenglowski,* vol. II, pag. 251). Voesc să dau o soluţie în coordonate tangenţiale. Fie deci:

$$(A) \qquad a_1 u + b_1 v + c_1 w = 0$$

$$(B) \qquad a_2 u + b_2 v + c_2 w = 0$$

$$(C) \qquad a_3 u + b_3 v + c_3 w = 0$$

$$(D) \qquad a_4 u + b_4 v + c_4 w = 0$$

ecuaţiile tangenţiale ale patrulaterului. Ecuaţia unei conice înscrisă în patrulater, în coordonate tangenţiale, este:

$$(1) \quad \lambda (a_1 u + b_1 v + c_1 w)(a_3 u + b_3 v + c_3 w) + \mu (a_2 u + b_2 v + c_2 w)(a_4 u + b_4 v + c_4 w) = 0,$$

unde λ, μ sunt parametri variabili, sub formă omogenă. Fie $F(x, y, z)$ focarul şi $I(1, i, 0)$, $J(1, -i, 0)$ cele două puncte absolute (ciclice) ale planului. Ne vom servi aci de celebra proprietate, anume că *focarul unei conice (curbe), este punctul de unde se pot duce la conică (curbă), două tangente isotrope.* In cazul nostru, se vede lesne că dreapta FI are drept coordonate $(-iz, z, ix - y)$. Scriind acum că aceste coordonate verifică ecuaţia (1) a conicei şi anulând coeficientul lui i şi termenul liber, găsim ecuaţiile:

$$\lambda [(c_1 x - a_1 z)(c_3 x - a_3 z) - (c_1 y - b_1 z)(c_3 y - b_3 z)] + \mu [(c_2 x - a_2 z)(c_4 x - a_4 z) - (c_2 y - b_2 z)(c_4 y - b_4 z)] = 0,$$

$$\lambda [(c_1 x - a_1 z)(c_3 y - b_3 z) + (c_3 x - a_3 z)(c_1 y - b_1 z)] + \mu [(c_2 x - a_1 z)(c_4 y - b_4 z) + (c_4 x - a_4 z)(c_2 y - b_2 z)] = 0.$$

Eliminând parametrii găsim rezultatul:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} (c_1 x - a_1 z)(c_3 x - a_3 z) - (c_1 y - b_1 z)(c_3 y - b_3 z) & (c_2 x - a_2 z)(c_4 x - a_4 z) - (c_2 y - b_2 z)(c_4 y - b_4 z) \\ (c_1 x - a_1 z)(c_3 y - b_3 z) + (c_3 x - a_3 z)(c_1 y - b_1 z) & (c_2 x - a_2 z)(c_4 y - b_4 z) + (c_4 x - a_4 z)(c_2 y - b_2 z) \end{vmatrix} = 0.$$

Se vede uşor că coordonatele celor şease vârfuri ale patrulaterului verifică ecuaţia (2). Dacă acum înmulţim coloana I cu $c_2 c_4$ şi coloana II cu $c_1 c_3$ şi scădem elementele coloanei I, ecuaţia (2) se scrie:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} A_1 x + B_1 y + C_1 z & (c_2 x - a_2 z)(c_4 x - a_4 z) - (c_2 y - b_2 z)(c_4 y - b_4 z) \\ -B_1 x + A_1 y + C_2 z & (c_2 x - a_2 z)(c_4 y - b_4 z) + (c_4 x - a_4 z)(c_2 y - b_2 z) \end{vmatrix} = 0,$$

unde s'a pus pentru prescurtare:

$$A_1 = -a_1 c_2 c_3 c_4 + a_2 c_1 c_3 c_4 - a_3 c_1 c_2 c_4 + a_4 c_1 c_2 c_3$$

$$B_1 = b_1 c_2 c_3 c_4 - b_2 c_1 c_3 c_4 + b_3 c_1 c_2 c_4 - b_4 c_1 c_2 c_3$$

$$C_1 = c_1 c_3 (b_2 b_4 - a_2 a_4) - c_2 c_4 (b_1 b_3 - a_1 a_3)$$

$$C_2 = -c_1 c_3 (a_2 b_4 + a_4 b_2) + c_2 c_4 (a_1 b_3 + a_3 b_1).$$

Dacă observăm că locul căutat este o *cubică,* pentru a-i căuta direcţiile asimptotice, tăem cubica (3) cu dreapta dela infinit $z = 0$, şi observăm lesne că admite o asimptotă reală şi două asimptote isotrope, deci *cubica loc,* este o *cubică circulară.*

2. *Observarea I.* Putem proceda şi altfel şi anume: Pentru a nu se complica calculele, luăm unul din puncte ca origină şi una din axe să treacă printr'un al doilea punct, anume axa de x. Ecuaţiile celor patru puncte sunt în coordonate tangenţiale:

$$w = 0, \quad a u + w = 0, \quad a_1 u + b_1 v + c_1 w = 0, \quad a_2 u + b_2 v + c_2 w = 0.$$

Ecuaţia conicei înscrisă în patrulater este:

$$(4) \quad \lambda w (a_1 u + b_1 v + c_1 w) + \mu (a u + w)(a_2 u + b_2 v + c_2 w) = 0.$$

Ecuaţia punctelor dela infinit ale tangentelor duse din punctul:

$$u x + v y + w = 0$$

de coordonate neomogene (x, y), este:

$$(5)\quad \lambda(ux+vy)[(a_1-c_1x)u+(b_1-c_1y)v]-$$
$$\mu[(a-x)u-vy][(a_2-c_2x)u+(b_2-c_2y)v]=0.$$

Pentruca punctul (x, y) să fie un focar al conicei (4) trebue ca ecuaţia (5) să fie identică cu ecuaţia punctelor ciclice ale planului:

$$u^2+v^2=0.$$

Trebue deci ca în ecuaţia (5) coeficienţii lui u^2 şi v^2 să fie egali, iar coeficientul lui uv să fie nul. Eliminând parametrii λ, μ. Intre cele două ecuaţii astfel obţinute, găsim că locul e o *cubică circulară.*

Observarea II. Problema studiată mai sus este citată în cartea d-lui *T. Lemoyne—Les lieux géométriques en Mathématiques spéciales,* susceptibilă de a fi soluţionată cu ajutorul teoriei *caracteristicilor.* (A se vedea şi: *Brocard et Lemoyne) — Courbes remarquables,* tome I, page 140). Procedând în acelaş mod ca la prima soluţie, putem demonstra următoarea proprietate cunoscută, foarte interesantă:

Locul focarelor parabolelor înscrise într'un triunghiu dat, este cercul circumscris acelui triunghiu.

Fie triunghiul ABC. Luăm latura BC ca Ox şi înălţimea vârfului A ca Oy şi fie $A(0, a, 1)$; $B(b, 0, 1)$ şi $C(c, 0, 1)$. Ecuaţiile tangenţiale ale punctelor A, B, C sunt:

$$(A)\,av+w=0,\quad (B)\;bu+w=0,\quad (C)\;cu+w=0.$$

Ecuaţia unei conice înscrise în triunghiul ABC este:

$$(6)\quad \gamma(bu+w)(cu+w)+\mu(cu+w)(av+w)+$$
$$v(bu+w)(av+w)=0.$$

Pentruca conica (6) să fie parabolă, trebue să scriem că e *tangentă dreptei dela infinit.* Scriem că coordonatele dreptei dela infinit (0, 0, 1) verifică ecuaţia (6) şi găsim condiţia:

$$\lambda+\mu+\nu=0.$$

In colo procedăm ca mai sus. Pentru a verifica că locul e *cerc,* se scrie că trece prin punctele absolute ale planului $I(1, i, 0)$ şi $J(1, -i, 0)$. Pentru o soluţie geometrică a se vedea *Duporcq—Géométrie moderne.*

3. In particular:

Locul focarelor conicelor înscrise într'un paralelogram este o iperbolă echilateră.

4. Printr'un procedeu asemănător, sau prin alte procedee. s'ar putea studia următoarele proprietăţi interesante:

a) Locul focarelor conicelor înscrise într'un triunghiu şi conjugate în raport cu două drepte este o cubică circulară.

b) Locul focarelor conicelor conjugate cu un triunghiu dat şi tangente la o dreaptă dată, este o cubică circulară.

c) Locul focarelor conicelor înscrise într'un triunghiu şi văzute dintr'un punct M *sub un unghiu drept, este o cubică circulără.* In cazul *când se vede din* M *sub un unghiu oare care, locul este o sextică bicirculară.*

5 La fel s'ar putea studia problemele:

a) Locul focarelor conicelor circumscrise unui patrulater este o sextică bicirculară, care are ca puncte duble, punctul de întâlnire al diagonalelor şi punctele de întâlnire ale laturilor opuse.

In particular:

b) Locul focarelor conicetor circumscrise unui paralelogram, este o curbă de gradul al patrulea.

NOTE MATEMATICE

10. *Asupra unei probleme de geometrie analitică.*

1. Ne propunem a găsi *locul centrelor cercurilor ce se văd din două puncte date subunghiuri constante.* Această problemă este cunoscută (A se vedea *Niewenglowski-Géometrie Analytique,* tome I, page 197, problème 12, precum şi *R. M. T., anul IV,* pag., 71, problema 34).

Voesc să dau o soluţie diferită de metoda obişnuită.

Fie:

$x^2+y^2-2ax-2\beta y+\gamma=0$, $M(a_1, b_1)$ şi $N(a_2, b_2)$ ecuaţia cercului şi cele două puncte fixe date. Fie acum încă (ne-am raportat la axe rectangulare oarecare).

$$(1)\ \begin{cases} y-b_1=m_1(x-a_1) \\ y-b_1=m_2(x-a_1) \end{cases};\quad (2)\ \begin{cases} y-b_2=n_1(x-a_2) \\ y-b_2=n_2(x-a_2) \end{cases}$$

ecuaţiile celor două perechi de tangente duse din M şi N la cerc, unde m_1, m_2, n_1, n_2 sunt variabile.

Scriind că dreptele (1) şi (2) formează unghiuri constante, căpătăm următoarele condiţii:

$$(3)\qquad (m_1+m_2)^2-4m_1m_2=k_1^2(1+m_1m_2)^2$$

$$(4)\qquad (n_1+n_2)^2-4n_1n_2=k_2^2(1+n_1n_2)^2.$$

Vom scrie acum că distanţa dela centrul cercului la fiecare din dreptele din (1) apoi din (2), face cât raza cercului $R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma}$. Căpătăm:

$$(5)\qquad \frac{[m_1(\alpha-a_1)-(\beta-b_1)]^2}{m_1^2+1}=\frac{[m_2(\alpha-a_1)-(\beta-b_1)]^2}{m_2^2+1}=A.$$

$$(6)\qquad \frac{[n_1(\alpha-a_2)-(\beta-b_2)]^2}{n_1^2+1}=\frac{[n_2(\alpha-a_2)-(\beta-b_2)]^2}{n_2^2+1}=A,$$

unde s'a pus pentru prescurtare:

$$A=\alpha^2+\beta^2-\gamma=R^2.$$

Dacă în (5) facem diferenţa numărătorilor către diferenţa numitorilor, apoi analog facem suma numărătorilor către suma numitorilor, căpătăm:

$$(7)\qquad m_1+m_2=\frac{2(\alpha-a_1)(\beta-b_1)}{(\alpha-a_1)^2-A},$$

$$m_1m_2=\frac{(\beta-b_1)^2-A}{(\alpha-a_1)^2-A}.$$

Pe aceiaşi cale deducem din ecuaţiile (6):

$$(8)\qquad n_1+n_2=\frac{2(\alpha-a_2)(\beta-b_2)}{(\alpha-a_2)^2-A},\quad n_1n_2=\frac{(\beta-b_2)^2-A}{(\alpha-a_2)^2-A}$$

Dacă acum punem pentru un moment:

$$B_1=(\alpha-a_1)^2+(\beta-b_1)^2,\quad B_2=(\alpha-a_2)^2+(\beta-b_2)^2$$

şi dacăm introducem valorile (7) şi (8) în (3) şi (4) şi facem calculele, deducem ecuaţiile:

$$(9)\qquad 4A^2(k_1^2+1)-4AB_1(k_1^2+1)+B_1^2k_1^2=0$$

$$(10)\qquad 4A^2(k_2^2+1)-4AB_2(k_2^2+1)+B_2^2k_2^2=0.$$

Din (9) şi (10) deducem imediat:

$$(11)\qquad \frac{A}{B_1}=\frac{\sqrt{k_1^2+1}\pm1}{2\sqrt{k_1^2+1}},\quad \frac{A}{B_2}=\frac{\sqrt{k_2^2+1}\pm1}{2\sqrt{k_2^2+1}}$$

Divizând relaţiile (11) şi punând:

$$P=\frac{\sqrt{(k_1^2+1)(k_2^2+1)}\pm\sqrt{k_1^2+1}}{\sqrt{(k_1^2+1)(k_2^2+1)}\pm\sqrt{k_2^2+1}},$$

căpătăm: $\frac{B_1}{B_2}=P$, sau desvoltând pe B_1 şi B_2:

$$(x^2+y^2)(P-1)+2x(a_1-a_2P)+$$
$$2y(b_1-b_2P)+(a_2^2+b_2^2)P-a_1^2-b_1^2=0.$$

Prin urmare locul geometric se compune din patru *cercuri.*

2. *Observare.* Pe aceiaşi cale se poate rezolva şi problema următoare:

Locul centrelor cercu ilor ce trec printr'un punct fix şi văzute dintr'un alt punct sub un unghiu constant, se compune din două cercuri.

Şi în legătură cu aceasta:

Învăluitoarea axului radical al unui cerc fix Γ şi al cercurilor ce trec printr'un punct fix şi se văd din alt punct fix sub un unghiu constant, este o conică.

VIRGIL COSNITA
Student Matematici

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XXXII, No. 11, Iulie 1927. Contabilitatea şi matematica, de *I. Ionescu.* Asupra unor limite, de *Miu M. Ioan.*

2. *Curierul Matematic,* vol. III, No. 5, Iulie 1927. Asupra unor identităţi, de *A. Stoica.*

3. *Bulletin Scientifique,* tome 1, fasc. 3. Sur l'intégrale des fonctions de deux variables complexes, *M. Ghermanesco.* Sur les surfaces équipotentielles d'un courant rectiligne indéfini, *Ernest Abason.* Sur l'essai des courroies de commande, *Cornélius Miklósi.* Sur le travail absorbé au laminage, *Cornélius Miklósi.* Essais mécaniques de matériaux faits dans le laboratoire de l'école, *C. Teodorescu.* Die Cerambyciden und deren Verbreitung in der Bucovina, *Dr.O rest Marcu.*

CONCURSUL REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIŞOARA

Continând un obicei care are tendinţa de a creia o tradiţie am instituit şi anul acesta un concurs între corespondenţii noştri elevi de liceu, fixându-i condiţiunile încă din No. 7 al Revistei (15 Septembrie 1926).

Am menţinut modul de clasificare de anul trecut adică după numărul punctelor bune, socotind câte cinci puncte bune de fiecare problemă rezolvată dintre cele prevăzute cu câte un asterisc, câte două pentru celelalte propuse în numerile 7, 8, 9 şi 10 şi câte un punct bun pentru problemele rezolvate şi publicate în „Revistă“ într'unul din numerile 1 — 5 inclusiv ale volumului.

Am menţinut de asemeni dispoziţia luată anul trecut de a clasifica între dânşii pe concurenţii aparţinând aceleiaşi clase.

Numărul celor înscrişi a scăzut. Anul acesta am avut 19 faţă de 37 de candidaţi câţi am avut anul trecut. Distribuiţi pe clase candidaţii se prezintă în modul următor:

în clasa V 3,

în clasa VI 5,

în clasa VII 8,

în clasa VIII 3.

După licee consideraţi, concurenţii s'au plasat în felul următor: şase dela liceul militar din Iaşi, trei dela liceul „Cantemir“ din Bucureşti, câte doi dela liceele Gh. Lazăr“ din Bucureşti şi I. C. Brătianu din Piteşti şi în fine câte unul dela liceele „Moisă Nicoară“ din Arad, „Mihai-Viteazul“ din Bucureşti, „Fraţii Buzeşti“ din Craiova, „V. Alexandri“ din Galaţi, „Naţional“ din Iaşi, „P.-Rareş“ din P.-Neamţ.

Am constatat cu părere de rău, lipsa candidaţilor dela unele licee care ne-au trimis anul trecut şi dela care ne aşteptam şi anul acesta: „S. Haret“, „Matei Basarab“ din Bucureşti, liceul din Braşov, liceul militar din Craiova, liceele din Bacău, Botoşani, Ploeşti, Timişoara, etc.

Iată acum şi rezultatul concursului.

Doi din cei trei candidaţi din clasa V au făcut sforţări lăudabile pentru a corespunde condiţiunilor de premiere. Fără a fi atins un număr de puncte pentru a obţine premiul, totuşi d-l *Savin Ion* dela liceul militar din Iaşi merită a fi menţionat, obţinând 20 puncte bune.

Clasa VI are în fruntea sa pe un elev al liceului „Cantemir“ din Bucureşti, pe d-l *Botea G. Emil* cu 57 puncte, căruia i se decerne premiul.

Menţiuni au obţinut d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgil* dela liceul „Fraţii Buzeşti“ din Craiova cu 52 de puncte şi *Stan I. Aurelian* dela liceul militar din Iaşi cu 40 de puncte.

In clasa VII primul clasificat este d-l *Nestor Gh, Dumitru* elevul liceului „Cantemir“ din Bucureşti, cu 93 de puncte. D-l Nestor, o veche cunoştinţă a noastră a cărui evoluţie ascendentă am urmărit-o cu plăcere în intensa sa activitate dela „Revistă“, se distinge printr'o putere remarcabilă de analiză care-l conduce la interesante generalizări şi complectări.

Demni de mentionat sunt d-nii: *Gheorghiu T. Gheorghe* dela liceul „V. Alexandri“ din Galaţi cu 72 de puncte, *Panţu Z. Ion* şi *Popescu D. Stelian ex aequo* cu câte 71 puncte, ambii dela liceul „Gh. Lazăr“ din Bucureşti“.

In clasa VIII cel mai mare număr de puncte l'a întrunit d-l *Stoica N. Aurelian*, elev al liceului „Cantemir“ din Bucureşti“ (92 puncte). Activitatea sa arată solide cunoştinţi şi serioasă putere de concentrare. I se cuvine cu prisosinţă premiul.

Menţiuni: d-l *Novacu Valeriu* dela liceul „Moisă Nicoară“ din Arad cu o bogată activitate (89 de puncte şi d-l *Podariu Alexandru* dela liceul „Petru Rareş“ din P.-Neamţ cu necontestate calităţi de analiză în generalizări.

Şi anul acesta ca şi anul trecut liceul „Cantemir“ ne-a dat cele mai bune elemente: toţi premiaţii sunt elevi ai acestui liceu. Fenomenul ese din cadrul hazardului: el constitue o verificare a muncii entuziaste pe care o depune corpul didactic al acestui liceu şi deci un bine-meritat titlu de glorie al său.

Numărul maxim de puncte bune care se putea obţine în condiţiunile concursului de anul acesta este de 124. Numărul maxim realmente obţinut

este 93 *(d-l Nestor D.)*. S'a obținut astfel 75% din ceiace s'ar fi putut da în cel mai bun caz,

Anul trecut ne propusesem să studiem modalitatea unui concurs local și sub controlul nostru direct. Până acum n'am ajuns la o soluție acceptabilă. Rămâne totuși ca o idee care ne va preocupa și pe viitor.

VICTOR VALCOVICI

PROBLEME REZOLVATE

572*. — *Să se găsească numărul întreg* N *divizibil prin numerele întregi a, b, c știind că* N *este egal cu suma câturilor sale prin cei 3 divizori.*

COL. GH. BUICLIU

Conform enunțului trebue să avem:

$$(1) \qquad N=\frac{N}{a}+\frac{N}{b}+\frac{N}{c}$$

$$(2) \qquad \therefore \quad abc=ab+bc+ca.$$

Se știe că media aritmetică a mai multor numere este cel mult egală cu media lor geometrică. Putem deci scrie:

$$\frac{abc}{3}=\frac{ab+bc+ca}{3}\leqq\sqrt[3]{abbcca}$$

$$\therefore \quad abc\leqq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$\therefore \quad abc\leqq 27$$

sau ținând seama de (2):

$$(3) \qquad abc=ab+bc+ca\leqq 27.$$

Relația (2) arată că este destul a găsi numerele întregi *a, b, c,* numărul N va fi orice multiplu comun al lor.

Relația (3) arată că nici unul din numerele *a, b, c,* nu poate fi mai mare ca 27.

Din (2) se scoate ușor:

$$(4) \quad b=\frac{ac}{(a-1)c-a}=1+\frac{c+a}{(a-1)c-a}.$$

Pentru ca b să fie număr întreg, trebue ca:

$$c+a\geqq(a-1)c-a.$$

$$(5) \qquad \therefore \quad c\leqq\frac{2a}{a-2}=2+\frac{4}{a-2}.$$

Cea mai mare valoare întreagă a lui $\frac{4}{a-2}$ este 4 care corespunde lui $a=3$, iar cea mai mică valoare întreagă este 1 care corespunde lui $a=6$. Deci cea mai mare valoare a lui c este 6.

Prin urmare singurele valori ale lui a, trebue căutate între numerele întregi de la 1 la 6. Valoarea 1 trebue exclusă căci pentru $a=1$ egalitatea (2) dă:

$$b+c=0$$

fără sens în numere întregi pozitive.

Cu acestea se trece la încercări

Pentru $a=2$ relația (4) dă:

$$b=2+\frac{4}{c-2}$$

care are loc în numere întregi pentru:

$c-2=1$ sau $c-2=2$ sau $c-2=4$

$\therefore \quad c=3$ „ $c=4$ „ $c=6$

deci: $b=6$ „ $6=4$ „ $b=3$

In mod analog pentru $a=3$ relația (4) dă:

$$b=1+\frac{c+3}{2c-3}.$$

Pentru ca b să fie întreg trebue să avem:

$$c+3\geqq 2c-3 \quad \therefore \quad c\leqq 6.$$

Dând în (6) lui c pe rând toate valorile întregi dela 2 la 6 se găsește că avem:

$$b=6;\ 3;\ 2.$$

Pentru $c=2;\ 3;\ 6.$

Făcând $a=4$ în (4) se găsește:

$$b=1+\frac{c+4}{3c-4}.$$

Pentru ca b să fie întreg trebue să avem:

$$c+4\geqq 3c-4 \quad \therefore \quad c\leqq 4.$$

Cu acestea găsim pentru b și c sistemul:

$$b=4;\ 2$$

$$c=2;\ 4.$$

Pentru $a=5$, (4) dă:

$$b=1+\frac{c+5}{4c-5} \qquad \therefore \quad c\leqq\frac{10}{3}=3{,}33.$$

Dând lui c pe rând valorile 2 și 3 nu se găsesc valori întregi pentru b.

In fine pentru $a=6$ avem:

$$b=1+\frac{c+6}{5c-6} \quad \therefore \quad c\leq 3$$

care conduc la:

$$b=3\,;\ 2$$

$$c=2\,;\ 3.$$

Centralizând sub formă de tablou rezultatele găsite, urmează că problema admite următoarele 10 sisteme de soluțiuni:

Soluția	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
a	2	2	2	3	3	3	4	4	6	6
b	6	4	3	6	3	2	4	2	3	2
c	3	4	6	2	3	6	2	4	2	3
N	M 6	M 4	M 6	M 6	M 3	M 6	M 4	M 4	M 6	M 6

Se vede că soluțiile (1), (3), (4), (6), (9) și (10) nu sunt de cât soluția (1) în care s'au schimbat între ele numerele a, b, c după cum soluțiile (7) și (8) sunt soluția (2).

Ca rezultat al problemei se poate răspunde că numerele N cerute în enunț sunt toți multiplii lui 6 în care caz a, b, c sunt divizorii 2, 3, 6 a lui 6, sau toți multiplii de 4 în care caz a, b, c sunt 2, 4, 4 sau în fine toți multiplii de 3 în care caz a, b, c sunt egali cu 3.

Exemple:

$$N=60=\frac{60}{2}+\frac{60}{3}+\frac{60}{6}$$

$$N=84=\frac{84}{2}+\frac{84}{4}+\frac{84}{4}$$

$$N=99=\frac{99}{3}+\frac{99}{3}+\frac{99}{3}.$$

Observațiuni. 1°. D-l *D. Nestor* (lic. Cantemir, București) a rezolvat complect problema punând pe N sub formele $3k$, $4k$, $6k$.

2°. D-l *N. Manolescu* (Șc. Politechnică Timișoara) a dat soluția complectă punând pe N sub forma $2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 6^{\gamma}$. E.

3°. D-l *E. G. Botea* (lic. Cantemir, București), a dat soluție parțială punând pe N sub formele $27n$, $32n$, $36n$ eliminând as.fel soluțiile mai mici ca 36, 32 și 27.

4°. D-l *St. D. Popescu* (lic. Lazăr, București), a dat soluții complecte pentru a, b, c și a enunțat că N este un multiplu comun a lui a, b, c. Această enunțare nu este suficientă pentru rezolvarea problemei, după cum se vede din soluția de mai sus. De altfel această afirmare este conținută în enunț.

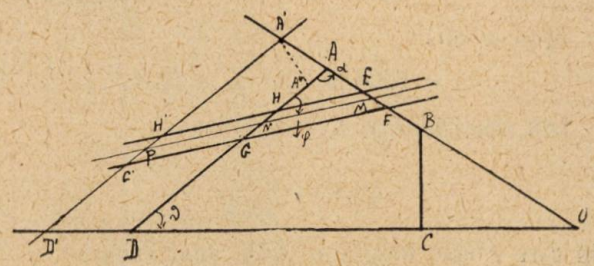
5°. Soluții parțiale date de d-nii: *Albeață E.* (lic. P.-Neamț), *Atanasescu D* (Șc. Polit., Timișoara), *Dănciulescu V.* (lic. Buzești, Craiova), *Fericeanu Șt.* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghiu Gh,* (lic. Galați), *Novacu V.* (lic. Arad), *Pantu I.* (lic. Lazăr, București), *Podariu A.* (lic. P.-Neamț), *Roman I.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Solnițaru L. N.* (lic. P.-Neamț), *Steblea Șt.* (Șc. Polit., Timișoara), *Stoica A.* (lic. Cantemir, București) și *Țanovici C.* (Șc. Polit., Timișoara).

583*. — *Se proectează o șosea rectilină largă de 12 m. inclusiv șanțurile, al cărei ax trebuie să taie ogorul unui locuitor. Conturul ogorului este un patrulater oare care* A B C D. *Axul șoselei taie laturile* A B *și* A D *în punctele* M *și* N *cuprinse între* A *și* B *și între* A *și* D. *Se cere să se deplaseze latura* A D *paralel cu ea, așa ca locuitorul să fie complect despăgubit de suprafața ce va ocupa șoseaua. Să se discute cazurile de figură, Terenul e presupus plan.*

Aplicație când A B C D *e un dreptunghiu cu laturile 288 m. și 67,66 m. iar axul șoselei face 26° cu latura* A B *și o taie într'un punct la 28 m. de* B.

COL. GH. BUICLIU

Fie O intersecția laturilor A B, C D; E F G H patrulaterul pe care-l mușcă șoseaua din ogor; A′D′ noua poziție a lui A D după despăgubire; H G G′H′ patrulaterul pe care-l mușcă șoseaua din figura A′ A D D′; P intersecția lui M N cu A′D′; α unghiul D A B; δ unghiul A D C; φ unghiul A N M; d lungimea laturei A D; x distanța între A D și A′D′; θ suma $\alpha+\delta$; S_1 suprafața E F G H; S_2 suprafața H G G′H′ și S suprafața A′ A D D′.



Se vede imediat că locuitorul va fi despăgubit când vom avea:

$$(1) \qquad S = S_1 + S_2.$$

Triunghiurile asemeni OAD și $OA'D'$ dau:

$$\frac{AD}{OA} = \frac{A'D'}{OA'}$$

$$\therefore \quad \frac{AD + A'D'}{OA + OA'} = \frac{AD}{OA}$$

$$(2) \qquad \therefore \quad AD + A'D' = \frac{AD}{OA}(OA + OA').$$

Triunghiul OAD dă:

$$(3) \qquad OA = \frac{d \sin \delta}{\sin \theta}.$$

Din triunghiul $OA'A''$, în care A'' este proecția lui A' pe AD se scoate:

$$(4) \qquad AA' = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

In fine pe figură se vede că:

$$OA' = OA + AA'$$

și ținând seamă de (3) și (4):

$$(5) \qquad OA' = \frac{d \sin \delta}{\sin \theta} + \frac{x}{\sin \alpha}.$$

Inlocuind în (2) lungimele prin valorile date de (3) și (5) găsim:

$$AD + A'D' = \frac{d \sin \theta}{d \sin \delta}\left[\frac{d \sin \delta}{\sin \theta} + \frac{d \sin \delta}{\sin \theta} + \frac{x}{\sin \alpha}\right].$$

$$(6) \qquad \therefore \quad AD + A'D' = \frac{\sin \theta}{\sin \delta}\left[2d \frac{\sin \delta}{\sin \theta} + \frac{x}{\sin \alpha}\right] =$$

$$2d + \frac{x \sin \theta}{\sin \alpha \sin \delta}.$$

Suprafața trapezului $ADD'A'$ este dată de:

$$(7) \qquad S = \frac{AD + A'D'}{2} \; x = d\,x + \frac{x^2 \sin \theta}{2 \sin \alpha \sin \delta}.$$

Apoi avem:

$$S_1 = 12\,MN \quad \text{și} \quad S_2 = 12\,NP.$$

Din triunghiul MAN se scoate:

$$MN = \frac{c \sin \alpha}{\sin \varphi}$$

în care c este lungimea AM, apoi avem:

$$PN = \frac{x}{\sin \varphi}$$

așa că:

$$(8) \qquad S_1 = 12 \frac{c \sin \alpha}{\sin \varphi} \quad \text{și} \quad (9) \qquad S_2 = \frac{12x}{\sin \varphi}.$$

Ținând seama de (1), (7), (8) și (9) ecuația problemei este:

$$(9) \qquad \frac{\sin^2 \theta}{2 \sin \alpha \sin \delta} x^2 + \left(d - \frac{12}{\sin \varphi}\right) x - 12 \frac{c \sin \alpha}{\sin \varphi} = 0.$$

Din rădăcinele acestei ecuații se ia numai acea care plasează pe $A'D'$ pe prelungirile laturilor BA și CD.

Cazurile particulare care se pot ivi și care se pot trata aproape la fel sunt:

a) când MN este așa de aproape de A în cât A cade pe șosea. In acest caz se ia din ogor un triunghiu,

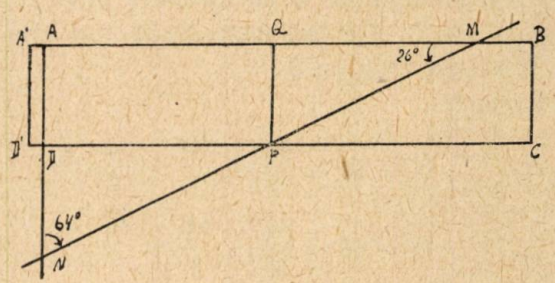
b) când B cade pe șosea,

c) când D cade pe șosea,

d) când și B și D cad pe șosea.

Aplicația numerică corespunde unui caz diferit aceluia pentru care a fost stabilită ecuația (9) căci N cade pe prelungirea lui AD și atunci problema se reduce la a construi un dreptnnghiu $A'ADD'$ echivalent cu un paralelogram de înălțime 12 și de latură MP. Problema se poate rezolva fie grafic, fie prin calcul.

Iată soluția prin calcul.



Triunghiul dreptunghic NAM dă:

$$NA = MA \operatorname{tg} 26^0 = 260 \operatorname{tg} 26^0.$$

Avem:

$$\log 260 = 2{,}41497$$

$$\log \operatorname{tg} 26^0 = \bar{1}{,}68818$$

$$\log NA = 2{,}10315$$

$$\therefore \quad NA = 126{,}80\,\text{m}.$$

Apoi din triunghiul M Q P se scoate:

$$MP = PQ \sin 26^0 = 67{,}65 \sin 26^0$$

iar suprafața tăiată de șosea din ogor este:

$$S' = 12 \times 67{,}65 \sin 26^0.$$

Suprafața A′ A D D′ va fi dată de:

$$S'' = 67{,}65\, x = 12 \times 67{,}65 \sin 26^0$$

$$\therefore \quad x = 12 \sin 26^0$$

$$\log 12 = 1{,}07918$$

$$\log \sin 26^0 = \bar{1}{,}64184$$

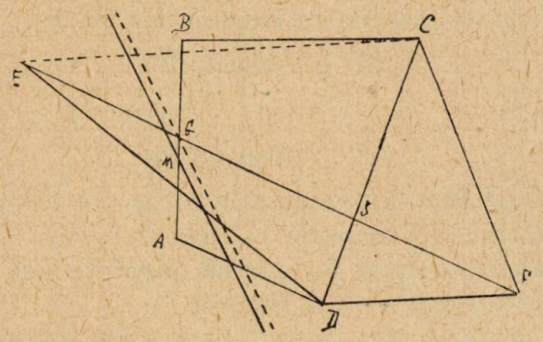
$$\log x = 0{,}72102$$

$$\therefore \quad x = 5{,}26 \text{ m}.$$

Fig. 2 este la scara $^1/_{4000}$.

Observațiuni. 1°. A rezolvat bine problema d-l *A. Stoica.* 2°. D-nii *Vasilescu B.* (București) și *Zagaican I.* (Șc. de Conductori. Chișinău) au făcut erori de calcule.

3°. D-nii *Pantu I.* și *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, București) au trimis soluții absolut identice dar nu pentru enunțul problemei 583. Dânșii nu au deplasat latura A D paralel cu dânsa păstrând pe D pe latura C D. Iată soluția d-lor în cazul în care s'au considerat. Una din marginile șoselei taie pe A B în G. Paralela din G la A D taie pe D C în I. Fie H mijlocul lui A G. Dreapta



D H taie pe G I în E iar paralela din D la C E tae pe G I în F. Zic că patrulaterul G B C F este echivalent cu A B C D. In adevăr triunghiurile A H D și H G E sunt echivalente prin construcție, — deci A D F G este echivalent. cu D E F. Dar D E F este echivalent cu D C F ca având baza D F comună și vârfurile așezate pe paralela C E la bază. Dacă se scade din D C F suprafața D I F rămâne F C I care urmează că este echivalentă cu D E I, deci cu A G I D. Prin urmare G B C F este echivalent cu A B C D.

585*. — *Să se rezolve inegalitatea:*

$$\frac{\cos x \cos^2 \frac{x}{2} + \sin x \sin^2 \frac{x}{2} - \cos x}{4 \sin \frac{x}{2} \cos x - 2 \sin \frac{x}{2} - 2 \cos x + 1} > 0,$$

și să se scrie forma generală a arcelor care o satisfac.

ION PROTOPOPESCU

Insemnăm cu E primul membru al inegalității și putem scrie succesiv:

$$E = \frac{\sin x \sin^2 \frac{x}{2} - \cos x \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right)}{2 \cos x \left(2 \sin \frac{x}{2} - 1\right) - \left(2 \sin \frac{x}{2} - 1\right)} =$$

$$\frac{\sin^2 \frac{x}{2} (\sin x - \cos x)}{\left(2 \sin \frac{x}{2} - 1\right)(2 \cos x - 1)} =$$

$$\frac{\sin^2 \frac{x}{2} (\cos x - \sin x)}{\left(2 \sin \frac{x}{2} - x\right)\left(4 \sin^2 \frac{x}{2} - 1\right)} =$$

$$\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} - 1}\right)^2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2}\left(2 \sin \frac{x}{2} + 1\right)}$$

Factorul:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} - 1}\right)^2$$

fiind pozitiv oricare ar fi arcul x, urmează că pentru ca E să fie pozitiv, să avem:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} > 0.$$

Perioada de variație a lui E este 4π.

Vom întocmi tabloul de variație dela 0 până la 4π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{4}$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$	$+$	0	$-$	0 $+$	0	$-$	0	$+$ 0
$\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0 $-$	$-$	0	$+$
E	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	

Inegalitatea dată este satisfăcută când arcul x satisface inegalitățile:

$$4k\pi \leqq x < 4k\pi + \frac{\pi}{4},\quad 4k\pi + \frac{5\pi}{4} < x \leqq 4k\pi + \frac{9\pi}{4},$$

$$4k\pi + \frac{7\pi}{3} < x < 4k\pi + \frac{13\pi}{4},\quad 4k\pi + \frac{11\pi}{3} < x \leqq 8k\pi.$$

Soluții parțiale date de d-nii: *Botea Gh. Emil* (lic. Cantemir, București), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ion* (lic. Galați), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Triculescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Stoica N. Aurel* (lic. Cantemir, București) *Țanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Vasiliu Gh Gheorghe* (Satu-Mare) și *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori Chișinău).

603. — *Numărul* N *scris în două baze de numerație este reprezentat prin 69 și 96. Care sunt acele baze?*

ION PROTOPOPESCU

Fie x și y acele baze. Conform enunțului avem:

$$N = 6x + 9 = 9y + 6, \text{ unde } x > 9,\ y > 9$$

De aci deducem:

$$x = \frac{3y-1}{2}$$

x și y fiind întregi, trebuie ca:

$$\begin{cases} y = 2n+1, \\ x = 3n+1 \end{cases} \quad \text{atunci,}$$

unde pentru a satisface inegalitățile de mai sus, trebue să luăm:

$$n \geqq 5,$$

avem deci soluțiile:

x	16	19	22	25	....
y	11	13	15	17	....

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Avramescu Th. Ion* (lic. Carol, Craiova), *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, București), *Călin M. Gheorghe* (lic. Caracal), *Călniceanu Gheorghe* (lic. Timișoara), *Colă Sebastian* (lic. Buzești, Craiova), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Etingher Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Gheorghe Mihai* (lic, Milit., Craiova), *Hamparțum Gr.* (lic. Constanța), *Haim L.* (lic. P.-Neamț), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iași), *Mihailescu Cezar* (lic. Galați), *Nichita Aurel* (lic. Buzești, Craiova), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucure ti), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Santo Semo* (lic. Silistra), *Solnițaru V. Longin* (lic. Pitești), *Triculescu I. Ioan* (lic. Buzești, Craiova), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Sat.-Mare), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vâlsănescu Viorel* (lic. Pitești) și *Zagaican Ilie* (Șc de Conductori, Chișinău).

604. — *Să se arate că restul împărțirei lui* N^{50} *prin 101, nu poate fi de cât* -1, 0 *sau* $+1$.

COL. GH. BUICLIU.

Dacă N = mult. 101, atunci evident:

$$N^{50} = \text{mult. } 101,$$

deci restul lui N^{50} prin 101, este zero.

Dacă $N \neq 101$ și observând că 101 este prim, după teorema lui *Fermat,* avem:

$$N^{101-1} - 1 = \text{mult. } 101,$$

sau:

$$(N^{50}+1)(N^{50}-1) = \text{mult } 101$$

101 fiind prim, trebue să dividă pe unul din cei doi factori din primul membru, rezultă deci:

$$N^{50} + 1 = \text{mult. } 101$$

sau:

$$N^{50} - 1 = \text{mult. } 101.$$

Dacă $N \neq 101$, conchidem de aci, că N^{50} divizat prin 101, dă restul -1 sau $+1$.

Deci oricare ar fi N, restul împărțirei lui N^{50} prin 101 este -1, 0 sau $+1$.

Observare. Pe cale analoagă se poate demonstra problema mai generală:

Dacă p este prim, atunci restul împărțirei lui $N^{\frac{p-1}{2}}$ *prin p este* -1, 0 *sau* $+1$.

In adevăr:

$$N^{p-1} - 1 = M\,p.$$

Dar $p - 1 = 2q$ deci:

$$(N^q + 1)(N^q - 1) = M\,p$$

BIBLIOTECA „ASTRA"
...STRU

$$\therefore\quad N^{q}+1=N^{\frac{q-1}{2}}+1=Mp\quad\therefore\quad N^{\frac{p-1}{2}}=Mp-1$$

sau:

$$N^{q}-1=N^{\frac{p-1}{2}}-1=Mp\quad\therefore\quad N^{\frac{p-1}{2}}Mp+1$$

apoi când N se divide cu p restul este evident zero.

Soluții date de d-nii: *Colă Sebastian* (lic. Buzești, Craiova), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Iancu D.* (lic. Național, Iași), *Manolescu I. N.* (Șc. Polit., Timișoara), *Nichita C. Aurel* (lic. Buzești, Craiova), *Santo Semo* (lic. Silistra), *Șoimulescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Solniţaru V. L. Nicolae* și *Triculescu Ion* (lic. Buzești, Craiova).

Alte soluții, date de d-nii: *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București) și *Roman I. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, București).

614. — *Să se rezolve inegalitatea:*

$$\frac{3x^2+x-2}{3x-2}<\frac{3+7x-3x^2-2x^3}{2x^2(2x-3)}$$

GHEORGHE TH. GHEORGHIU

Inegalitatea dată se mai poate scrie:

$$\frac{(3x-2)(x+1)}{3x-2}<-\frac{(2x-3)(x^2+3x+1)}{2x^2(2x-3)},$$

sau, încă:

$$x+1+\frac{x^2+3x+1}{2x^2}<0$$

$$\therefore\quad 2x^3+3x^2+3x+1<0,$$

fiindcă oricare ar fi x, real, avem $2x^2>0$

Ultima inegalitate se mai poate scri:

$$2x(x^2+x+1)+x^2+x+1<0$$

sau:

$$(2x+1)(x^2+x+1)<0.$$

Cum factorul x^2+x+1 este pozitiv oricare ar fi x real, fiindcă are rădăcini imaginare, urmează că inegalitatea dată este echivalentă cu:

$$2x+1<0$$

$$\therefore\quad x<-\frac{1}{2}.$$

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil*, *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Bârs Petre* (București), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Crăciunescu Eugen* (Craiova), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dinu S. D-tru* (Șc. de Conductori Chișinău), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Fericeanu Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Gârneață Enache* (iic. Milit., Iași), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Haim F. L.* (lic. P.-Neamț), *Iancu David* (li . Național, Iași), *Ianculescu Octavian* (Șc. Polit., Timișoara), *Ignat M. Paul* (lic. Milit., Iași), *Iliescu Th. Theodor* (student, București), *Mateescu I.* (București), *Mihailescu D. Traian* (lic. P.-Neamț), *Panaite N. Theodor* (lic. Milit, Iași), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel A Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Popa Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu C. Virgil* (Târgoviște), *Popluca Mircea, Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Simionov Kindin* (Tulcea), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Seblea Șt. Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare) și *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori, Chișinău).

615. — *Să se afle limita expresiei:*

$$E=\frac{x+\sin x-\operatorname{tg} y}{y-\sin x+\operatorname{tg} x},$$

pentru $x=y=0$, *soluțiuni ale ecuației:*

$$e^{x}+\operatorname{tg} y-e^{y}=0.$$

V. ALACI

Observăm că pentru $x=y=0$ expresia dată, ia forma $\frac{0}{0}$ și că suntem în condițiile enunțului dela punctul No. 2 al articolului: „*O clasă de expresiuni nedeterminate*", din R. M. T., anul IV, No. 1. Vom folosi dar direct formula (4) stabilită în acel articol, care ne procură limita cerută pentru E, când ea există, anume:

$$(1)\qquad \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_1,\ y_1) & f'_y(x_1,\ y_1)\\ \psi'_x(x_1,\ y_1) & \psi'_y(x_1,\ y_1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x_1,\ y_1) & \varphi'_y(x_1,\ y_1)\\ \psi'_x(x_1,\ y_1) & \psi'_y(x_1,\ y_1)\end{vmatrix}},$$

unde:

$$f(x,\ y)=x+\sin x-\operatorname{tg} y$$

$$\varphi(x,\ y)=y-\sin x+\operatorname{tg} x$$

$$\psi(x,\ y)=e^{x}+\operatorname{tg} y-e^{y}$$

iar:

$$x_1=y_1=0.$$

In cazul nostru avem:

$$\begin{cases} f'_x(x,\ y)=1+\cos x\\ f'_y(x,\ y)=-\dfrac{1}{\cos^2 y}\end{cases}\qquad\begin{cases} \varphi'_y(x,\ y)=-\cos x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\\ \varphi'_y(x,\ y)=1\end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi'_x(x,\ y)=e^{x}\\ \psi'_y(x,\ y)=\dfrac{1}{\cos^2 y}-e^{y}\end{cases}$$

care pentru:

$$x=x_1=0,\quad y=y_1=0,$$

devin:

$$\begin{cases} f'_x(0,\,0)=2 \\ f'_y(0,\,0)=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi'_x(0,\,0)=0 \\ \varphi'_y(0,\,0)=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \psi'_x(0,\,0)=1 \\ \psi'_y(0,\,0)=0. \end{cases}$$

Expresiunea (1), atunci devine:

$$E=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}=-1.$$

Limita lui E pentru $x=y=0$, este deci, -1.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Cernăuți Iosif* (lic. Timișoara), *Cocârlan Pavel* (lic, Timișoara), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Crăciunescu N. Eugeniu* (lic. Carol, Craiova), *Dimitriu Ath. Ioan* (lic. Galați), *Fericeanu Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Ianculescu Octavian* (Șc. Polit., Timișoara), *Iliescu Th. Theodor* (student, București), *Ionescu M. Haralamb*(lic, Pitești), *Lepădatu Miclea*, *Manolescu I. N.* (Șc. Polit., Timișoara), *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit. Iași), *Mihăilescu D. Traian* (lic. P.-Neamț), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel E. Nicol e* (lic. Carol, Craiova), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popluca Mircea* (ltc. Arad), *Simionov P. Kindin* (Tulcea), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați), *Steblea Șt. Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare) și *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța).

PROBLEME PROPUSE

653. — Care-i patratul perfect de șase cifre, în care prima cifră este egală cu a treia, ultima cifră scrisă după a patra dă un număr egal cu patratul primei cifre; în fine a cincea cifră, scrisă după a doua, dă tocmai ultima cifră mărită cu unitatea?

ION Z. PANTU

654. — Să se demonstreze că punctul lui *Feuerbach* al unui triunghiu ABC cu laturile în progresie aritmetică se găsește la mijlocul razei OA a cercului circumscris.

COL. GH. BUICLIU.

655. — Se dă un triunghiu ABC, se duce cercul înscris cu centrul în I, cercul circumscris O și centrele I_a, I_b și I_c ale cercurilor exînscrise. Să se demonstreze că:

1) Patrulaterul $BICI_a$ este inscriptibil; 2) Patrulaterul I_bCBI_c este inscriptibil; 3) Că cercul O taie dreptele I_cO, I_bO și I_aO în două părți egale.

ȘTEFAN ST. STEBLEA

656. — In cercul O se duc diametrul AB și secanta AM. Diametrul paralel la AM taie cercul O în C și D. BD taie pe AM în E. FB taie pe CD în H, F fiind mijlocul lui AE. Perpendiculara dusă prin H pe FB taie pe AM, în N. Să se afle locul geometric al lui N când AM variază.

LEPADATU I. MICLEA

657. — Să se afle câtul expresiunei;

$$xy(2x^3-2xy^2+xy)-(x^2+y^2)^4+x^6-y^6+2y^5,$$

prin fiecare din polinoamele:

$$P_1=x+y-1 \quad \text{și} \quad P_2=x^2+xy+y^2.$$

COSNITA CEZAR

658. — Să se arate că avem:

$$\begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & \dots & (n-2)! & (n-1)! \\ 1! & 2! & 3! & \dots & (n-1)! & n! \\ 2! & 3! & 4! & \dots & n! & (n+1)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-2)! & (n-1)! & n! & \dots & (2n-4)! & (2n-3)! \\ (n-1)! & n! & (n+1)! & \dots & (2n-3)! & (2n-2)! \end{vmatrix} = [1!\,2!\,3!\dots(n-1)!]^2$$

C. IONESCU-BUJOR

659. — Să se stabilească identitatea:

$$4\prod_{k=1}^{3}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{7}\right)-4\prod_{k=1}^{3}\left[\cos t-\cos\frac{(2k-1)\pi}{6}\right]=\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t.$$

V. ALACI

660. — Intre elementele obicinuite ale unui triunghiu, avem relația:

$$3\begin{vmatrix} a & \frac{1}{r_a} & \frac{1}{h_a} \\ b & \frac{1}{r_b} & \frac{1}{h_b} \\ c & \frac{1}{r_c} & \frac{1}{h_c} \end{vmatrix}+\frac{1}{r}\begin{vmatrix} 1 & a & \frac{1}{h_a} \\ 1 & b & \frac{1}{h_b} \\ 1 & c & \frac{1}{h_c} \end{vmatrix}+\frac{1}{r}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{r_a} & a \\ 1 & \frac{1}{r_b} & b \\ 1 & \frac{1}{r_c} & c \end{vmatrix}=0$$

COSTACHESCU V. C-TIN

INFOMATIUNI

REZULTATUL CONCURSULUI „R. M. T.“

Cl. V.

1. *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit. Iaşi). *0 (puncte).*

2. *Savin Ioan* (lic. Milit. Iaşi) 571, 575, 576, 581, 587, 594, 599, 600, 579, 602.

$10 \times 2 = 20$ *(puncte).*

3. *Solniţaru V. Longin* (lic. Piteşti), 572*, 591*,

$5 \times 2 = 10$ *(puncte)*

Cl. VI.

1. *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, Bucureşti), 571 575, 581, 588, 587, 590*, 594, 597, 598, 599, 600, 578, 579, 595, 596, 584*, 591*, 601, 602, 572*, 585*,

$32 \times 2 + 5 \times 5 = 57$ **(puncte).**

2. *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), 438, 521, 525, 536, 539, 571, 575, 576, 581, 588, 587, 590*, 594, 598, 599, 600, 579, 595, 591*.

$5 \times 1 + 12 \times 2 + 2 \times 5 = 39$ *(puncte).*

3. *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), 571, 575, 581, 582, 587, 590*, 594, 599, 600, 573, 579, 595, 596, 580, 584*, 593, 601, 602, 572*, 585*

$16 \times 2 + 4 \times 5 = 52$ *(puncte).*

4. *Iancu H. David* (lic. Naţional, Iaşi), 505, 438, 456, 571, 575, 581, 588, 587, 590*, 598, 595, 596, 580, 591*, 602,

$3 \times 1 + 10 \times 2 + 2 \times 5 = 33$ *(puncte).*

5. *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), 525, 571, 581, 588, 587, 590*, 594, 598, 599, 600, 574, 579, 584*, 591*, 601, 602,

$1 + 12 \times 2 + 3 \times 5 = 40$ *(puncte).*

Cl. VII.

1. *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galaţi), 505, 523, 438, 521, 536, 405, 571, 575, 576, 581, 582, 588, 589*, 586, 587, 590*, 577*, 594, 598. 599, 600, 573, 574, 578, 580, 584*, 593, 602, 572*, 585*,

$6 \times 1 + 18 \times 2 + 6 \times 5 = 72$ *(puncte).*

2. *Marinescu N. Nic.* (lic. Milit., Iaşi), 575, 576, 581, 588, 589*, 587, 590*, 594, 598, 599, 600, 579, 595, 584*, 591*, 602.

$12 \times 2 + 4 \times 5 = 44$ *(puncte).*

3. *Nestor Gh. Dumitru* (lic. Cantemir, Bucureşti), 491, 499, 501, 506, 314, 412, 420, 495, 504, 505, 346, 438, 510, 521, 536, 539, 397, 405, 571, 575, 576, 581, 589*, 582, 586, 590*, 577*, 594, 597, 598, 599, 600, 573, 574, 578, 579, 595, 596, 584*, 587, 591*, 601, 602, 572*, 585*.

$18 \times 1 + 20 \times 2 + 7 \times 5 = 93$ **(puncte).**

4, *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), 499, 500, 505, 438, 510, 521, 536, 539, 571, 575, 576, 581, 588, 589*, 586, 587, 590*, 594, 600, 578, 579, 595, 596, 584*, 591*, 602, 572*, 583*, 585*.

$8 \times 1 + 14 \times 2 + 7 \times 5 = 71$ *(puncte).*

5. *Patron Th. N.* (lic. Milit., Iaşi), 590, 575, 576, 581, 588, 589*, 587, 590*, 594, 598, 599, 600, 579, 595, 584*, 591*. 602.

$1 \times 1 + 12 \times 2 + 4 \times 5 = 45$ *(puncte).*

6. *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), 505, 432, 523, 438, 510, 521, 525, 536, 571, 575, 576, 581, 588, 589*, 582, 586, 587, 590*, 594, 598, 599, 600, 574, 579, 595, 596, 580, 591*, 601, 602, 572*, 583*.

$8 \times 1 + 19 \times 2 + 5 \times 5 = 71$ *(puncte).*

7. *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), 348, 328, 438, 521, 536, 405, 571, 575, 576, 581, 588, 589*, 587, 594, 598, 599, 600, 573, 579, 596, 591*, 601, 602, 572*, 585*.

$6 \times 1 + 15 \times 2 + 4 \times 5 = 56$ *(puncte).*

8. *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti), 499, 420, 505, 438, 521, 536, 539, 397, 405, 447, 571, 575, 573.

$10 \times 1 + 3 \times 2 = 16$ *(puncte).*

Cl. VIII.

1. *Novacu Valeriu* (lic. Arad), 499, 500, 348, 412, 505, 219, 328, 523, 521, 536, 539, 405, 456, 571, 575, 576, 581, 588, 582, 586, 589*, 587, 590*, 577*, 594, 598, 597, 599, 600, 573, 574, 578, 579, 595, 596, 580, 584*, 591*, 593, 601, 602, 572*.

$13 \times 1 + 23 \times 2 + 6 \times 5 = 89$ *(puncte)*

2. *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), 499, 500, 348, 412, 495, 505, 328, 338, 523, 438, 510, 521, 525, 536, 539, 405, 447, 456, 571, 576, 581, 588, 589*, 586, 587, 590*, 594, 597, 598, 574, 578, 579, 595, 596, 584*, 601, 572*, 585*.

$18 \times 1 + 15 \times 2 + 5 \times 5 = 73$ *(puncte).*

3. *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), 491, 499, 500, 501, 506, 348, 412, 495, 504, 505, 328, 436, 438, 510, 521, 539, 405, 456, 461, 571, 575, 576, 581, 582, 587, 590*, 577*, 594, 597, 598, 599, 600, 573, 574, 578, 579, 596, 580, 584*, 591*, 601, 602, 572*, 583*, 585*.

$19 \times 1 + 19 \times 2 + 7 \times 5 = 92$ **(puncte).**

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VII. 15 SEPTEMBRIE 1927 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. EMIL STEFĂNESCU. CATEVA INEGALITATI.
2. NOTE MATEMATICE, 11, 12, 13, 14.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 605, 618, 621, 623, 624, 625, 626, 632, 633, 637.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Adminstraţia Revistei, şi se poate procura în himibul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.
Anul VI, broşat, 80 lei.

ANUL VII — NO. 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1927

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

CATEVA INEGALITAȚI

de EMIL STEFANESCU
student

Voi pleca dela proprietatea următoare: *„Media aritmetică a mai multor numere este mai mare ca media lor geometrică“.*

Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, n numere pozitive. După proprietatea de mai sus avem:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1\,a_2\ldots a_n}$$

sau:

$$(1)\qquad a_1+a_2+\ldots+a_n > n\sqrt[n]{a_1\,a_2\ldots a_n}.$$

Dacă $a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}$ atunci:

$$(n-1)\,a_1+a_n > n\sqrt[n]{a_1^{n-1}\,a_n}$$

împărțind cu a_1, obținem:

$$(n-1)+\frac{a_n}{a_1} > n\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}}.$$

Punând aci $\frac{a_n}{a_1}=A$ căpătăm:

$$(2)\qquad A+n-1 > n\sqrt[n]{A}$$

Dacă $a_1=a_2=\ldots=a_{n-2}$, atunci relația (1) devine:

$$(n-2)\,a_1+a_{n-1}+a_n > n\sqrt[n]{a_1^{n-2}\,a_{n-1}\,a_n}$$

împărțind cu a_1 și punând $\frac{a_{n-1}}{a_1}=A_1$ și $\frac{a_n}{a_1}=A_2$ obținem:

$$(3)\qquad A_1+A_2+n-2 > n\sqrt[n]{A_1\,A_2}.$$

(Dacă facem aci $n=2$ avem inegalitatea cunoscută $A_1+A_2>2\sqrt{A_1\,A_2}$).

Fie acum $(n-k)$ din cele n numere, egale adică:

$$a_1=a_2\ldots=a_{n-k}.$$

Procedând în mod analog găsim inegalitatea:

$$(4)\quad A_1+A_2+A_3+\ldots+A_k+n-k > n\sqrt[n]{A_1\,A_2\ldots A_k}$$

punând $A_1^n, A_2^n, \ldots A_k^n$ în loc de $A_1, A_2, \ldots, A_k$ avem:

$$(5)\quad A_1^n+A_2^n+\ldots+A_k^n+n-k > n\,A_1\,A_2\,A_3\ldots A_k.$$

Dacă în identitatea (1) considerăm α_1 numere egale cu a_1, α_2 numere egale cu $a_2, \ldots, \alpha_p$ numere egale cu a_p, așa încât:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=n$$

obținem:

$$(6)\quad \alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_p a_p > n\sqrt[n]{a_1^{\alpha_1}\,a_2^{\alpha_2}\ldots a_p^{\alpha_p}}$$

cu condiția (7) $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=n$.

Scoțând valoarea lui α_1 din (7) și înlocuind-o în (6), împărțind apoi cu a_1:

$$n-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_p+\alpha_2\frac{a_2}{2}+\alpha_3\cdot\frac{a_3}{a_1}+\ldots$$

$$\ldots+\alpha_p\cdot\frac{a_p}{a_1} > n\sqrt[n]{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^{\alpha_3}\ldots\left(\frac{a_p}{a_1}\right)^{\alpha_p}}$$

însemnând:

$$\frac{a_2}{a_1}=A_2\quad \frac{a_3}{a_1}=A_3\ldots\frac{a_p}{a_1}=A_p \text{ și } p=k \text{ avem:}$$

$$n-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_k+\alpha_2 A_2+\alpha_3 A_3+\ldots$$

$$\ldots+\alpha_k A_k > n\sqrt[n]{A_2^{\alpha_2}\,A_3^{\alpha_3}\ldots A_k^{\alpha_k}}$$

sau:

$$(8)\quad n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_k+\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+\ldots$$

$$\ldots+\alpha_k A_k > n\sqrt[n]{A_1^{\alpha_1}\,A_2^{\alpha_2}\ldots A_k^{\alpha_k}}$$

cu condiția: $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k<n$

înlocuind pe $A_1, A_2, \ldots A_k$ cu $A_1^n, A_2^n, \ldots A_k^n$ avem:

$$(9)\quad \alpha_1 A_1^n + \alpha_2 A_2^n + \ldots + \alpha_k A_k^n + n - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_k > n A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_k^{\alpha_k}.$$

Inegalitatea (2) se mai poate scrie și astfel:

$$(10)\qquad (n + A - 1)^n > A\, n^n$$

când $A = 2$ avem problema 22, pag. 28, Culeg. Algebră, *Ioachimescu.*

$$(u+1)^n > 2\, n^n.$$

Dacă în (10) facem $A = 1, 2, \ldots (A+1)$ căpătăm:

$$n^n = n^n$$
$$(n+1)^n > 2\, n^n$$
$$(n+2)^n > 3\, n^n$$
$$\ldots\ldots$$
$$(n+A)^n > (A+1)\, n^n$$

adunând parte cu parte obținem:

$$n^n + (n+1)^n + \ldots + (n+A)^n > \frac{(A+1)(A+2)}{2}\, n^n$$

împărțind cu n^n:

$$(11)\quad 1 + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \ldots + \left(1+\frac{A}{n}\right)^n > \frac{(A+1)(A+2)}{2}$$

In relația (3) însemnând $A_1 + A_2 - 2 = tn$, avem:

$$(12)\qquad (1+t)^n > A(tn + 2 - A)$$

In relația (4) făcând $A_1 = A_2 = \ldots = A_k$ obținem:

$$(13)\qquad K A + n - K > n \sqrt[n]{A^k} \qquad k < n$$

punând aci $A - 1 = nu$, obținem:

$$(14)\qquad (uk+1)^n > (un+1)^k.$$

Să considerăm acum identitatea (1). Avem:

$$a_2 + a_2 + \ldots + a^p > p \sqrt[p]{a_1 a_2 \ldots a_p}$$
$$a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{2p} > p \sqrt[p]{a_{p+1} a_{p+2} \ldots a_{2p}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{(n-1)p+1} + \ldots + a_{np} > p \sqrt[p]{a_{(n-1)p+1} \ldots a_{pn}}$$

când $a_k = k$ $(k = 1, 2, \ldots np)$ avem:

$$1 + 2 + \ldots + p > p \sqrt[p]{1.2\ldots p} \quad \therefore \quad \frac{p+1}{2} > \sqrt[p]{1.2\ldots p}$$

$$(p+1)\,t + \ldots + (2p) > p \sqrt[p]{(p+1)\ldots 2p}$$

$$\therefore \quad \frac{3p+1}{2} > \sqrt[p]{(p+1)(p+2)\ldots 2p}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[(n-1)p+1] + \ldots + (np) > p \sqrt{[(n-1)p+1]\ldots(np)}$$

$$\therefore \quad \frac{(2n-1)p+1}{2} > \sqrt[p]{[(n-1)(p+1)]\ldots(np)}$$

înmulțind parte cu parte ultimele neegalități găsim:

$$(15)\quad (1+p)(1+3p)(1+5p)\ldots [1+(2n-1)p] > 2^n \sqrt[p]{(np)!}$$

punând aci $p = 2q + 1$ obținem:

$$(16)\quad (1+q)(2+3q)(3+5q)\ldots[n+(2n-1)q] > \sqrt[2q+1]{[n(2q+1)]!}$$

Considerând formula (2) $A + (n-1) > \sqrt[n]{A}$ înlocuind pe n cu 1, 2, ... obținem:

$$A_1 = A_1$$
$$A_2 + 1 > 2\sqrt{A_2}$$
$$A_3 + 2 > 3\sqrt[3]{A_3}$$
$$\ldots\ldots$$
$$A_n + n - 1 > n \sqrt[n]{A_n}$$

prin adunare avem:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \frac{n(n-1)}{2} > A_1 + 2\sqrt{A_2} + 3\sqrt[3]{A_3} + \ldots + n\sqrt[n]{A_n}$$

sau:

$$(17)\quad \frac{A_1 + 2\sqrt{A_2} + \ldots + n\sqrt[n]{A_n}}{n} < \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n} + \frac{n-1}{2}$$

când $A_1 = 1$ $A_2 = 2 \ldots A_n = n$ obținem:

$$\frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}+\ldots+n\sqrt[n]{n}}{n}<$$

$$\frac{n(n+1)}{2n}+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}=n$$

(18) $$1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}+\ldots+n\sqrt[n]{n}<n^2$$

Dacă în neegalităţile de mai sus punem:

$$A_n-1=n\,b_n$$

avem:

(19) $$n\,b_n+n>n\sqrt[n]{n\,b_n+1}$$

sau: $$b_n+1>\sqrt[n]{n\,b_n+1}$$

dacă $b_n=\frac{1}{n^p}$ avem:

$$\left(\frac{1+n^p}{n^p}\right)^n>\frac{1+n^{p-1}}{n^p}$$

$$\therefore\quad (n^p+1)^n>(n^{p-1}+1)\,n^{p\,n-p}$$

Dacă $A_n+n-1=b_n$ atunci avem:

(20) $$b_n>n\sqrt[n]{b_n-(n-1)}$$

tot aşa obţinem relaţia:

(21) $$b_n>(n+1)\sqrt[n+1]{b_n-n}$$

de asemenea şi:

(22) $$b_n>\sqrt[n]{n\,b_n-(n-1)}.$$

Putem obţine in acelaş mod o serie întreagă de inegalităţi.

NOTE MATEMATICE

11. *Asupra funcţiunilor pseudo-omogene* (vezi R. M. T., vol. III, p. 1), *J. Wellstein* în *Archiv der Mathematik und Physik* III, Reihe 16, Band 1910, p. 93, consideră o funcţie de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ care satisface relaţia:

$$f(t^{h_1}x_1,\ t^{h_2}x_2,\ldots t^{h_n}x_n)=\frac{\varphi(t)}{\varphi(1)}\cdot f(x_1,\ x_2,\ldots x_n)$$

$\varphi(t)$ fiind o funcţie numai de t. Găseşte că trebue să avem:

$$\varphi(t)=t^h$$

şi arată apoi că funcţia $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ satisface ecuaţia cu derivate parţiale:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i\,x_i f_{x_i'}=hf$$

generalizarea formulai lui *Euler*.

TIB. POPOVICI

12. *Geometrie şi mecanică.* Să considerăm un triunghiu ABC, forţele paralele f_a, f_b, f_c aplicate în A, B, C şi M centrul lor de greutate. Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul pedal a lui M şi $A_mB_mC_m$ triunghiul complimentar a lui ABC. M este totodată centrul de greutate al forţelor:

$$F_a=\frac{f_b+f_c}{2},\quad F_b=\frac{f_c+f_a}{2},\quad F_c=\frac{f_a+f_b}{2}$$

aplicate în A_1, B_1, C_1.

Fie M' centrul de greutate a trei forţe paralele egale cu F_a, F_b, F_c aplicate în A, B, C. M' este şi centrul de greutate a trei forţe paralele egale cu:

$$F_b+F_c-F_a=f_a,\ F_c+F_a-F_b=f_b,$$
$$F_a+F_b-F_c=f_c,$$

aplicate în A_m, B_m, C_m. Toate acestea se demonstrează imediat prin descompunerea şi recompunerea convenabilă a forţelor considerate. Rezultă de aci că:

Complimentarul M' *a lui* M *are aceleaşi coordonate baricentrice în triunghiul* ABC *ca şi* M *în triunghiul său pedal.*

Această teoremă precizează soluţia problemei 3046 din G. M.", vol. XXXI, p. 106.

TIB. POPOVICI

13. *Asupra unui articol.* D-l *N. I. Manolescu* întrebuinţează calculul integral pentru sumarea puterilor asemenea a termenilor unei progresii aritmetice (R. M. T., vol. VII, pag. 75). Această metodă a fost dată şi de subsemnatul în articolul „*Asupra unei însumări*", din *Jurnal Matematic*, vol. I, pag. 102, 109.

TIB. POPOVICI

14. *Asupra unor identităţi.* Urmând o cale cunoscută voi deduce o identitate care se generalizeze unele din identităţile stabilite de d-l *Emil*

Ştefănescu, în articolul „Identităţi algebrice deduse cu ajutorul calculelor de algebră elementară", problema 380 din „F. M" şi alte identităţi de genul acesta.

Să considerăm sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x+y+z+\ldots+t=1 \\ a^m x+b^m y+c^m z+\ldots+b^m t=\alpha^m \\ a^{2m} x+b^{2m} y+c^{2m} z+\ldots+b^{2m} t=\alpha^{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^{(n-1)m} x+b^{(n-1)m} y+c^{(n-1)m}+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots+b^{(n-1)m} t=\alpha^{(n-1)m} \end{cases}$$

Rezolvind acest sistem de ecuaţii, cu ajutorul determinanţilor sau pe cale elementară obţinem:

$$x=\frac{(\alpha^m-b^m)(\alpha^m-c^m)\ldots(\alpha^m-b^m)}{(a^m-b^m)(a^m-c^m)\ldots(a^m-b^m)}.$$

Tot astfel avem pe $y, z, \ldots t$.

Inlocuind aceste valori în ultima ecuaţiune din sistemul considerat, avem:

$$\sum a^{(n-1)m}\frac{(\alpha^m-b^m)(\alpha^m-c^m)\ldots(\alpha^m-l^m)}{(a^m-b^m)(a^m-c^m)\ldots(a^m-b^m)}=\alpha^{(n-1)m}$$

sau aducând la numitor comun:

$$\sum a^{(n-1)m}(\alpha^m-b^m)(\alpha^m-c^m)\ldots(\alpha^m-b^m)=$$
$$(-1)^{n-2}\alpha^{(n-1)m}(a^m-b^m)(b^m-c^m)\ldots(b^m-a^m)$$

sau:

$$\sum a^{(p-1)m}(\alpha^m-b^m)(\alpha^m-c^m)\ldots(\alpha^m-b^m)=$$
$$(-1)^{n-2}\alpha^{(p-1)m}(a^m-b^m)(b^m-c^m)\ldots(b^m-a^m)$$

suma cuprinzând permutările circulare între $a, b, c, \ldots l$; p luând orice valoare între 0 şi n (n fiind numărul literilor $a, b, c, \ldots l$) iar m putând fi orice număr.

MARIUS MARIS
(lic. Arad)

BIBLIOGRAFIE

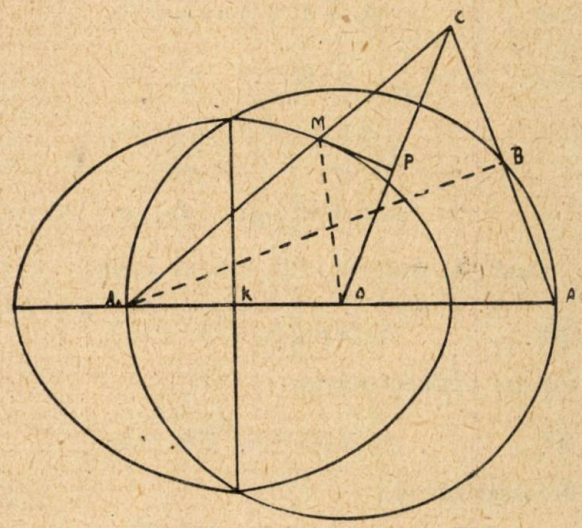
1. *Gazeta Matematică*, anul XXXII, No. 12. August 1927. † *Regele Ferdinand I.* Asupra numerilor întregi, de *Leonid Penenjchevici.*

2. *Curierul Matematic*, vol. III, No. 6, August 1927. Substituţiunile liniare şi un sistem de ecuaţiuni funcţionale de *Tib. Popovici.*

PROBLEME REZOLVATE

605. — *Se dă un cerc fix de centru* O. *Fie* A *un punct fix pe acest cerc. Prin* A *ducem o coardă care întâlneşte cercul în* B *şi prelungim coarda* AB *până în* C, *astfel ca să avem* AB = BC. *Unind punctul* A_1 *simetricul lui* A *în raport cu* O, *cu* C. *Perpendiculara pe mijlocul lui* OC *întâlneşte pe* A_1C *în* M. *Se cere locul geometric al punctului* M, *când secanta* ABC *variază.*

ŞT. MUSTA



MP fiind perpendiculară pe OC în mijlocul său, urmează că, OM = MC. Apoi fiindcă AB = BC şi $\sphericalangle A_1BA=90^0$, rezultă că în triunghiul AA_1C, A_1B este şi mediană şi înălţime, acest triunghiu este deci isoscel şi urmează, atunci că:

$A_1C=A_1A=2r$ (constant, r fiind raza cercului O).

Dar:

(1) $A_1C=A_1M+MC=MA_1+MO=2r=c.$

Locul punctului M este deci o elipsă cu focarele în A_1 şi O, având axa mare egală cu $2r$, fiindcă egalitatea (1) scrie că suma distanţelor lui M la A_1 şi O este constantă şi egală cu $2r$.

Soluţii date de d-nii: *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Dumitrescu Eugen* (lic. Buzău), *Lepădatu Miclea* (Găneşti), *Mihăilescu Cezar* (lic. Galaţi), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Ţintea Hariton* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Zagaican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău).

618. — *Să se arate că expresiunea:*

$$55^{77} - 3^3 \times 154 - 1,$$

se divide cu 2916.

STELIAN D. POPESCU

Considerăm dezvoltarea:

$$(1) \quad (a+1)^n - na - 1 = a^n + n a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} a^2.$$

Deducem uşor:

$$(a+1)^n - na - 1 = \text{mult. } a^2.$$

Dacă aci luăm:

$$a = 54, \quad n = 77,$$

avem:

$$55^{77} - 77 \times 54 - 1 = \text{mult. } 54^2,$$

sau încă:

$$55^{77} - 3^3 \times 154 - 1 = \text{mult. } 2916.$$

Expresia dată este deci multiplu de 2916.

Soluţie dată de d-nii: *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Belcescu D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Bordeianu Adrian* (lic, Milit., Iaşi), *Cădăriu I.* (lic. Arad), *Călin M. Gheorghe* (lic. Caracal), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Cernăuţi Iosif* (lic. Timişoara), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iaşi), *Costăchescu V. C-tin* (lic, Milit, Iaşi), *Crainu N. Ion* (lic. Piteşti), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic Buzeşti, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focşani), *Dimitriu Gh. Ştefan* (lic, Milit., Iaşi), *Diuu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Florescu Th. C-tin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Gârneaţă Enache* (lic. Milit., Iaşi), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiava), *Haicon Aurel* (lic. Milit., Iaşi), *Haim F. L.* (lic. P.-Neamţ), *Hamparţun R. Grigore* (lic. Constanţa), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Iancu Mişu* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Mosuţa Traian, Nichita C. Aurel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iaşi), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Paraschivescu Spiridon* (lic. Buzeşti, Craiova), *Pavel H. Nicolae* (Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Petrescu Virgil* (lic. Buzeşti, Craiova), *Pispiris D. Gheorghe* (lic. Bârlad), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Popescu C. Virgiliu* (Târgovişte), *Popluca Mircea, Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Savin Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Şerbănescu Mircea* (lic. Milit., Iaşi), *Sirkis Iosif, Solniţaru V. Longin, Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Triculescu Ioan* (lic. Buzeşti, Craiova), *Vâlceanu N. Justin* (lic, Tg.-Jiu) şi *Zagaican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău).

621. — *Dacă:*

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

se cere limita expresiei:

$$E = \sqrt[3]{f(x+1)} + \sqrt[3]{f(x+2)} + \sqrt[3]{f(x+3)} - 3\sqrt[3]{f(x)}$$

pentru $x = \infty$.

GH. CONSTANTINESCU

Vom rezolva următoarea problemă mai generală. *Dacă:*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$

se cere limita expresiei:

$$E_n = \sqrt[n]{f(x+1)} + \sqrt[n]{f(x+2)} + \sqrt[n]{f(x+3)} + \ldots + \sqrt[n]{f(x+n)} - n\sqrt[n]{f(x)},$$

pentru $x = \infty$.

Expresia dată se poate scri evident:

$$(1) \qquad E_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\sqrt[n]{f(x+i)} - \sqrt[n]{f(x)}\right].$$

Dar:

$$\sqrt[n]{f(x+i)} - \sqrt[n]{f(x)} = \frac{f(x+i) - f(x)}{\sqrt[n]{f^{n-1}(x+i)} + \sqrt[n]{f^{n-2}(x+i) f(x)} + \sqrt[n]{f^{n-3}(x+i) f^2(x)} + \ldots + \sqrt[n]{f^{n-1}(x)}} =$$

$$\frac{n a_0 i x^{n-1} + P(x)}{\sqrt[n]{a_0^{n-1} x^{n(n-1)} + A_1(x)} + \sqrt[n]{a_0^{n-1} x^{n(n-1)} + A_2(x)} + \ldots + \sqrt[n]{a_0^{n-1} x^{n(n-1)} + A_n(x)}},$$

unde $P(x)$ este un polinom de gradul $n-2$, iar $A_1(x)$, $A_2(x) \ldots A_n(x)$ sunt polinoame în general de gradul $n(n-1)-1$. Impărţind numărătorul şi numitorul cu x^{n-1} şi trecând la limită pentru $x = \infty$, avem:

$$\lim_{x=\infty} \left[\sqrt[n]{f(x+i)} - \sqrt[n]{f(x)}\right] = \lim_{n=\infty} \frac{n a_0 i + \frac{P(x)}{x^{n-1}}}{\sqrt[n]{a_0^{n-1} + \frac{A_1(x)}{x^{n(n-1)}}} + \sqrt[n]{a_0^{n-1} + \frac{A_2(x)}{x^{n(n-1)}}} + \ldots + \sqrt[n]{a_0^{n-1} + \frac{A_n(x)}{x^{n(n-1)}}}} = \frac{a_0 i}{\sqrt[n]{a_0^{n-1}}}.$$

Atunci trecând relaţiunea (1) la limită avem:

$$\lim_{x=\infty} E_n = \lim_{x=\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\sqrt[n]{f(x-i)} - \sqrt[n]{f(x)}\right] =$$

$$\sum_{i=0}^{n} \lim_{x=0} \left[\sqrt[n]{f(x+i)} - \sqrt[n]{f(x)}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_0 i}{\sqrt[n]{a_0^{n-1}}} =$$

$$\sqrt[n]{a_0}\,(1+2+3+\ldots+m),$$

sau: $$\lim_{x=\infty} E_m = \frac{n(n+1)}{2} \sqrt[n]{a_0}.$$

In cazul $n=3$, avem:

$$\lim_{n=\infty} E_3 = 6\sqrt[3]{a_0}.$$

Soluţii date de d-nii: *Călinescu I. Aurelian* (Zimnicea), *Căzămir A. Ioan* (lic. Arad), *Cernăuţi Iosif* (lic. T:mişoara), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galaţi), *Dumitrescu Eugen* (lic. Buzău), *Mocuţa T.* (lic. Arad), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popovici Mihai* (Focşani), *Saur I. Ioan* (lic, Arad), *Sprînceană Gheorghe* (lic. Galaţi).

Au soluţionat problema fără a o generaliza, d-nii: *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Aasarab, Bucureşti), *Mărculescu I. Origen* (lic. Carol, Craiova), *Sirgis Iosif* şi *Stan C.* (Roman).

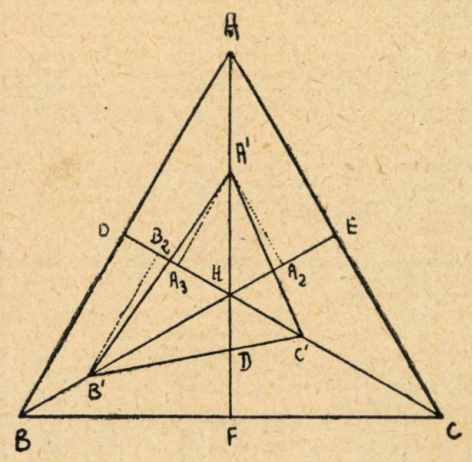
S'au primit încă multe soluţii greşite.

623*. — *Se dă triunghiul echilateral* ABC. *Se duc înălţimele lui, care se întâlnesc în* H. *Pe segmentele* AH, BH, CH, *se iau respectiv punctele* A', B', C' *astfel ca:*

$$A'A = \frac{AH}{2},\quad B'B = \frac{BH}{3},\quad C'C = \frac{2CH}{3}.$$

Se cere să se calculeze aria triunghiului A'B'C' *în funcţie de a latura triunghiului* ABC.

V. ALACI



* Enunţ rectificat.

Fie ABC triunghiul echilateral dat. Înălţimele sunt egale şi se taie la $\frac{2}{3}$ dela vârf. Privind figura 1 utem scrie:

$$S(A'B'C') = S(A'HB' + S\,B'HC') + S(C'HA')$$

$$= \frac{B'H \cdot A'A_1}{2} + \frac{C'H \cdot B'B_2}{2} + \frac{C'H \cdot A'A_3}{2}.$$

Insemnând cu h înălţimea triunghiului şi ţinând seamă şi de enunţ, putem scri:

$$B'H = \frac{2}{3}BH = \frac{4}{9}h,\quad C'H = \frac{1}{3}CH = \frac{2}{9}h.$$

Apoi, fiindcă $A'A_2$ şi $A'A_3$ sunt depărtările unui punct de pe bisectoarea unghiului EHD şi triunghiurile $A'HA_2$ şi $B'HB_2$ sunt respectiv asemenea cu AHE şi BHD, avem încă:

$$A'A_2 = A'A_3 = \frac{AD}{2} = \frac{a}{4},\quad B'B_2 = \frac{1}{3}BD = \frac{a}{3}.$$

Atunci:

$$S(A'B'C') = \frac{1}{2}\left(\frac{ah}{9} + \frac{2ah}{27} + \frac{ah}{18}\right) =$$

$$\frac{ah}{18}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad S(A'B'C') = \frac{13ah}{108}.$$

Cum:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

avem:

$$S(A'B'C') = \frac{13a^2\sqrt{3}}{216}.$$

Observare. S'a primit o soluţie foarte bună, dar neiscălită.

Soluţie trigonometrică. Vom folosi formula care dă suprafaţa unui triunghiu în funcţie de două laturi şi unghiul cuprins.

Putem scri:

$$S(A'B'C') = S(A'HB') + S(B'HC') + S(C'HA') =$$

$$\frac{A'H \cdot B'H \sin 120^0}{2} + \frac{B'H \cdot C'H \sin 120^0}{2} +$$

$$\frac{C'H \cdot A'H \sin 120^0}{2}$$

Dar:

$$A'H=\frac{AH}{2}=\frac{h}{3},\quad B'H=\frac{2}{3}BH=\frac{4}{9}h,$$

$$C'H=\frac{1}{3}CH=\frac{2}{9}h,\quad \sin 120^0=\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Atunci:

$$S(A'B'C')=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4h^2}{27}+\frac{8h^2}{81}+\frac{2h^2}{27}\right)=\frac{13\sqrt{3}h^2}{162}.$$

Cum: $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, avem:

$$S(A'B'C')=\frac{13a^2\sqrt{3}}{216}=\frac{13a^2}{72\sqrt{3}}.$$

Soluții date de d-nii: *Balaban I. Gh.*, *Cimescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iași), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Dinu S. D-tru* (Chișinău), *Dunu Ioan* (Cluj), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Mărculescu I. Origen* (lic. Carol, Craiova), *Morțun A. C-tin* (Semin. Pedag., Iași), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Popovici Mihai* (Focșani), *Savin I.*, *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iași), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Zagaican Ilie* (Chișinău) și *Zaharia Popa* (Cluj).

Soluție analitică dată de d-l *Popovici Mihai* (Focșani).

Luăm ca axe coordonate pe BC și AF. Atunci coordonatele (x_1, y_1), $x_2, y_2)$, (x_3, y_3) ale vârfurilor A', B', C', observând unele asemănări de triunghiuri, sunt:

$$x_1=0,\quad y_1=FH+HA'=\frac{h}{3}+\frac{h}{3}=\frac{2h}{3}$$

$$x_2=-\frac{HB'}{HB}\cdot\frac{a}{2}=-\frac{4}{9}h\cdot\frac{3}{2h}\cdot\frac{a}{2}=-\frac{a}{3},$$

$$y_2=\frac{BB'}{BH}\cdot FH=\frac{BH}{3}\cdot\frac{1}{BH}\cdot\frac{h}{3}=\frac{h}{9},$$

$$x_3=\frac{HC'}{HC}\cdot\frac{a}{2}=\frac{2}{9}h\cdot\frac{3}{2h}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{6},$$

$$y_3=\frac{CC'}{CH}FH=\frac{2}{3}\cdot\frac{CH}{CH}\cdot\frac{h}{3}=\frac{2h}{9}.$$

Folosind acum expresiunea suprafeței unui triunghiu în funcție de coordonatele vârfurilor, putem scrie:

$$S(A'B'C')=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}=$$

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & \frac{2h}{3}\\ 1 & -\frac{a}{3} & \frac{h}{9}\\ 1 & \frac{a}{6} & \frac{2h}{9}\end{vmatrix}=\pm\frac{ah}{108}\begin{vmatrix}1 & 0 & 6\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$\pm\frac{ah}{108}(-4-1+6+12)$$

$$\therefore\quad S(A'B'C')=\frac{13ah}{108}=\frac{13a^2\sqrt{3}}{216},$$

fiindcă $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Observare. In enunțul problemei s'a strecurat o greșeală, care a fost ușor observată de corespondenții de mai sus, din cauza simetriei, anume; în loc de:

$$C'C=\frac{2CH}{3}\quad \text{s'a pus,}\quad C'H=\frac{2CH}{3},$$

care face ca problema să fie foarte simplă:

Iată și soluția în acest caz. Dacă $C'H=\frac{2CH}{3}$, rezultă că $C'C=\frac{CH}{3}$ și cum și $B'B=\frac{BH}{3}$, urmează că B'C' este paralelă cu BC. Atunci:

$$S(A'B'C')=\frac{B'C'\cdot A'D}{2}.$$

Dar:

$$B'C'=\frac{2a}{3},\quad A'D=A'H+HD=\frac{h}{3}+\frac{2}{3}HF=$$

$$\frac{h}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{h}{3}=\frac{5h}{9},$$

și atunci:

$$S(A'B'C')=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{5h}{9}=\frac{5ah}{27}.$$

Cum:

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

avem:

$$S(A'B'C') = \frac{5a^2\sqrt{3}}{54} = \frac{5a^2}{18\sqrt{3}}.$$

Soluții date de d-nii: *Agarici C.* (Roman), *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Aldea Nicolae* (lic. M-rea Dealul), *Apăteanu T. Al.* (lic. Arad), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Cădariu I.* (lic. Arad), *Colinescu A.* (Zimnicea), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Diaconescu H. Aurel* (Romanați), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Drăgan I. Corneliu* (lic. Botoșani), *Fericeanu Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Floareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Florescu Th. C-tin* (lic. Buzești, Craiova), *Gavrilescu Ionel*, *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Gârd I. D-tru* (Dobrotești). *Gârneața Enache* (lic. Milit., Iași), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiev Nicolae* (lic. Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Golden Arthur* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Grațian C. Tănase* (lic. Arad), *Grigore A. Vancu* (lic. Arad), *Hohoi V.* (lic. Brașov), *Ionescu Ion* (lic. Caracal), *Ionescu D. C-tin Țiu* (lic. Milit., Craiova), *Ionescu G. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Isăcescu C. Titi* (Șc. Milit. de Geniu), *Iscu Coriolan* (lic. Cluj), *Lepădatu I. Miclea* (Găești), *Levy Jacques* (lic. Matei-Basarab, București), *Mălăescu T.* (lic. Arad), *Morărescu Ioan*, *Mocuță Traian* (lic. Arad), *Munteanu Zenc* (lic. Arad, *Nichita C. Aurel* (lic. Buzești, Craiova), *Nițulescu Gh. Victor* (Caracal), *Novac Aurel* (lic. Cluj), *Paraschivescu Spiridon* (lic. Buzești, Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Pârvulescu M. Ștefan* (lic. Milit., Craiova), *Petrescu Virgil* (lic. Buzești, Craiova), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Pleșoiu I. P.*, *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu Eugen* (lic. T.-Severin), *Popescu N. Ioan* (Cluj), *Popescu St. Toma* (lic. Pitești). *Popluca Mircea* (lic. Arad), *Procopescu Nestor* (Caracal), *Scarlat V. D.*, (lic. Câmpina), *Scurtu A. Nicolae* (lic. Brașov), *Solnițaru I. Longin* (lic. Găești), *Steblea Șt. Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Tarța Valer Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Triculescu Ioan* (lic. Buzești, Craiova), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) și *Vonica C. Ion* (lic. Tg.-Jiu).

624. — *Intre unghiurile unui triunghiu avem relația:*

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin A & \operatorname{cotg}\frac{A}{2} \\ 1 & \sin B & \operatorname{cotg}\frac{B}{2} \\ 1 & \sin C & \operatorname{cotg}\frac{C}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

RADULESCU C. MIHAIL

Folosind relațiile cunoscute:

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \ldots$$

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}, \ldots$$

determinantul dat pe care să-l notăm cu Δ, se poate scri ținând seamă de proprietățile determinanților:

$$\Delta = \frac{1}{2Rr}\begin{vmatrix} 1 & a & p-a \\ 1 & b & p-b \\ 1 & c & p-c \end{vmatrix} = \frac{1}{2Rr}\begin{vmatrix} 1 & a & p \\ 1 & b & p \\ 1 & c & p \end{vmatrix}$$

$$= \frac{p}{2Rr}\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ultimul determinant având două coloane egale.

Soluții analoage date de d-nii: *Călinescu I. Aurelian*, *Cernăuți Iosif* (lic. Timișoara), *Cocârlan Pavel* (lic. Timișoara), *Craiu N. Ion* lic. Pitești), *Crăciunescu N. Eugen* (Craiova), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ion* (lic. Galați), *Dimitriu Gh. Ștefan* (lic milit., Iași), *Floareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Florescu Th. C-tin* (lic, Buzești, Craiova), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Gheorghiu C. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Nichita Aurel* (lic. Buzești, Craiova), *Paraschivescu Spiridon* (lic. Buzești, Craiova), *Petrescu Virgil* (lic. Buzești, Craiova), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu St. Toma* (lic. Pitești), *Popovici M.* (Focșani), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sântimbreand Cornel* (Șc. Polit., Timișoara), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Steblea Șt. Ștefan* (Brașov), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina), *Triculescu Ion* (lic. Buzești, Craiova).

A tă soluție dată, de d-l *Vasiliu Gh. Gheorghe.* Desvoltând determinantul dat Δ, avem:

$$\Delta = \sum \operatorname{cot}\frac{A}{2}(\sin B - \sin C).$$

Ținând seamă, că:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

avem:

$$\Delta = \frac{1}{2R}\sum \operatorname{cotg}\frac{A}{2}(b-c) = 0,$$

fiindcă e cunoscută identitatea:

$$\sum \operatorname{cot}\frac{A}{2}(b-c) = 0.$$

Alte soluții mai lungi, date de d-nii: *Agarici G.* (Roman), *Albeață D. Emil* (lic. P.-Neamț), *Apoteanu I. Alexandru* (lic. Arad), *Avramescu Th. Ioan* (lic. Carol, Craiova), *Baciu C. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Berzovan Emil* (lic. Arad), *Cădariu I.* (lic. Arad), *Călin M. Gheorghe* (lic. Caracal),

Căzămir A. Iosif (lic. Arad), *Cimpoieş D. Nicolae* (lic. Arad), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag. Iaşi), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Mil., Iaşi), *Crăciunescu E.* (Craiova), *Demetrescu N. August* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Dimitriu At. Ion* (lic. Galaţi), *Dimitriu Gh. Ştefan* (lic. Milit., Iaşi), *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timişoara), *Fericeanu Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Oheorghiev Nicolae* (lic. Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Goldstein G. A.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Graţian C. Tănase* (lic. Arad), *Hohoi V.* (Braşov), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu N. Mihai* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu C-tin fiu* (lic. Milit., Craiova), *Kielburger Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Mara Şt.* (Arad), *Marineanu Traian* (Timişoara), *Mocuţa Traian* (lic. Arad), *Moisescu I nel* (lic. Arad), *Morţun A. C-tin* (Semin. Pedag., Iaşi), *Munteanu Zeno* (lic. Arad), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu N. Ion* (Cluj), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Târgovişte), *Papluca Mircea. Râmniceanu I. Cris'ian* (lic. Milit., Iaşi), *Savin Arnold* (lic. Focşani), *Savin Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Săbăduş D.*, *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iaşi), *Scurtu O. Nicolae* (lic. Braşov), *Şlicariu C.* (lic. Naţional, Iaşi), *Smilovici Paul* (lic. Roman), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Steblea St. Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Stepanescu Carol* (Şc. Polit., Timişoara), *Vâlceanu N. Justin* (Tg.-Jiu), *Zagaican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău) şi *Zaharia Popa* (Cluj).

625. — *Să se găsească numerile de patru cifre astfel ca ele să fie egale cu de trei ori produsul numerilor formate de primele două cifre şi ultimele două cifre.*

GH. CONSTANTINESCU

Dacă însemnăm cu x numărul format de primele două cifre şi cu y numărul format de ultimele două cifre a numărului cerut, avem conform enunţului:

$$100x+y=3xy$$

$$\therefore \quad y=\frac{100x}{3x-1}.$$

Numerile x şi $3x-1$ fiind prime între ele, urmează că $3x-1$ trebue să fie un divizor al lui 100, pentruca y să fie întreg.

Cum:

$$10 \leqq x < 100,$$

deci:

$$29 \leqq 3x-1 < 299,$$

trebuie să luăm pentru $3x-1$, aci divizorii ai lui 100, care sunt mai mari ca 29, nu putem avea decât:

$$3x-1=50 \quad \text{sau} \quad 3x-1=100$$

adică:

$$x=17, \quad \text{sau} \quad x=\frac{101}{3}.$$

Evident că numai $x=17$, convine problemei, în care caz $y=34$, iar numărul cerut este, 1734.

Soluţii date de d-nii: *Călinescu Aurelian*, *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iaşi), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Haim F. L* (lic. P.-Neamţ), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Murăroiu Aurel* (Braşov) şi *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ).

626. — *Să se demonstreze că determinantul:*

$$\begin{vmatrix} 2^{1927} & -3^{1925} & 7^{1930} \\ 2 & 3 & 7 \\ 2^{1923} & -3^{1921} & 7^{1926} \end{vmatrix}$$

este divizibil cu 5.

C-TIN V. COSTACHESCU

Vom demonstra mai general, că: *Dacă p e un număr prim şi a, b, c nişte numere nedivizibile cu p, d, e, f nişte numere întregi, atunci determinantul:*

$$\begin{vmatrix} a^{q+p-1} & b^{r+q-1} & c^{s+p-1} \\ d & e & f \\ a^q & b^r & c^s \end{vmatrix},$$

este divizibil cu p.

Scăzând din elementele primii linii, pe acelea ale ultimii, obţinem un determinant echivalent, cu elementele primii linii:

$$a^{q+p-1}-a^q=a^q(a^{p-1}-1),\ b^r(b^{p-1}-1),\ c^s(c^{p-1}-1)$$

elemente care sunt divizibile cu p, căci după teorema lui *Fermat*, factorii:

$$a^{p-1}-1,\ b^{p-1}-1,\ c^{p-1}-1,$$

sunt divizibil cu p, deci întreg determinantul e divizibil cu p.

In cazul problemei noastre, avem:

$a=2$, $b=-3$, $c=7$

$d=2$, $e=3$, $f=7$

$q=1923$, $r=1921$, $s=1926$, şi $p=5$.

Soluție și generalizare dată de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Floareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Târgoviște), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Sprinceană D. Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. (Milit., Iași) și *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța).

Soluții simple date de d-nii: *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Boncea Spiridon* (lic. Pitești), *Berzovan Emil* (lic. Arad), *Bordeianu Adrian* (lic. Milit., Iași), *Călinescu I. Aurelian* (Zimnicea), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iași), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Crăciunescu Eugen, Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dimitriu Gh. Ștefan* (lic. Milit, Iași), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureștii), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Haim F. L.* (lic. P.-Neamț), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Leibovici R. Emil* (lic. Pitești), *Mocuța Traian* (lic. Arad), *Moisescu Ionel* (lic. Arad), *Munteanu Zeno* (lic. Arad), *Punțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Pleșoiu I. P.*, *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Popescu St. Toma* (lic. Pitești), *Popovici Mihai* (Focșani), *Râmniceanu I. Cristian* (lic, Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București). *Saur A. Ioan* (lic. Arad), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Scurtu O. Nicolae* (Brașov), *Segârceanu D. C-tin* (Craiova), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vâlsănescu Viorel* (lic. Pitești), *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori, Chișinău) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

632. — *Dacă n este un număr întreg impar, expresiunea:*

$$\frac{(4n+5)^2+4n+5}{15}\cdot\frac{(4n+4)^2-4(n+1)}{3}\cdot\frac{(5n+5)(196n^2-49)}{16},$$

este un întreg.

CEZAR COSNITA

Insemnând cu E expresia dată, putem scri:

$$E=\frac{(4n+5)(4n+6)}{15}\cdot\frac{(4n+4)(4n+3)}{3}\cdot\frac{49(5n+5)(4n^2-1)}{16}=$$

$$\frac{49\cdot 2\cdot 4\cdot 5(4n+5)(2n+3)(n+1)(4n+3)(n+1)(2n-1)(2n+1)}{15\cdot 3\cdot 16}=$$

$$\frac{49(n+1)^2(2n-1)(2n+1)(2n+3)(4n+3)(4n+5)}{3\cdot 3\cdot 2}$$

Să arătăm acum că numărătorul se divide cu produsul:

$$3\times 3\times 2.$$

In adevăr, n fiind impar, $n+1$ este par, deci divizibil cu 2. Apoi n, față de 3 poate fi: mult. 3, mult. 3 ± 1.

Dacă, $n=$ mult. 3, factorii:

$$2n+3 \text{ și } 4n+3$$

se divide fiecare cu 3.

Dacă, $n=$ mult. $3-1$, atunci factorul:

$$(n+1)^2=(\text{mult. } 3)^2=\text{mult. } 9.$$

Dacă $n=$ mult $3+1$, atunci factorii:

$$2n+1 \text{ și } 4n+5$$

sunt fiecare divizibili cu 3.

Expresia dată este deci un întreg.

Soluții date de d-nii: *Albeață R. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealul), *Dimitriu At. Ioan* lic. Galați), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Iancu D.* (lic. Național, Iași), *Ionescu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Popescu C. Virgiliu* (Târgoviște), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Tomescu Nicolae* (lic. M-rea Dealul) și *Vâlsănescu Viorel* (lic. Pitești).

633. — *Să se demonstreze că expresiunea:*

$$(7+2^{100})\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2^5&1\\9&4&2^{50}\end{vmatrix}+37\begin{vmatrix}2^{100}&3&1\\1&5&1\\6&9&2^{50}\end{vmatrix}+2(2^{49}+1)\begin{vmatrix}2^{100}&1&3\\1&2^5&5\\6&4&9\end{vmatrix},$$

este divizibil cu 17.

V. ALACI

Vom folosi următoarea teoremă (R. M. T. anul V. pag. 22).

Dacă într'un determinant oarecare de ordinul m, înlocuim elementele unei coloane prin niște numere arbitrare, apoi înmulțim determinantul

cu suma elementelor scoase și facem acestă operație pentru fiecare coloană, atunci suma produselor astfel obținute, este egală cu suma numerilor arbitrare, înmulțită cu determinantul dat.

Aplicând această teoremă deteeminantului de ordinul al 3-lea:

$$\begin{vmatrix} 2^{100} & 1 & 1 \\ 1 & 2^5 & 1 \\ 6 & 4 & 2^{50} \end{vmatrix},$$

luând ca numere arbitrare pe 3, 5, 9, putem scri:

$$(7+2^{100})\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2^5 & 1 \\ 9 & 4 & 2^{50} \end{vmatrix} + 37\begin{vmatrix} 2^{100} & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & 2^{50} \end{vmatrix} +$$

$$2(2^{49}+1)\begin{vmatrix} 2^{100} & 1 & 3 \\ 1 & 2^5 & 5 \\ 6 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 17\begin{vmatrix} 2^{100} & 1 & 1 \\ 1 & 2^5 & 1 \\ 6 & 4 & 2^{50} \end{vmatrix} = \text{mult } 17.$$

Soluții date de d-nii: *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dimitriu Gh. Ștefan* (lic. Milit., Iași), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Ettinger A. Iexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel H. Nicoloe* (Craiova), *Părvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Podariu Alexandru* (P.-Neamț), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Saur A Ioan* (lic. Arad), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași) și *Vâlceanu I. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

637. — *Să se demonstreze că avem:*

$$\begin{vmatrix} a\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} & a\,\mathrm{cotg}\frac{A}{2} & a^2+\alpha^2 \\ b\,\mathrm{tg}\frac{B}{2} & b\,\mathrm{cotg}\frac{B}{2} & b^2+\beta^2 \\ c\,\mathrm{tg}\frac{C}{2} & c\,\mathrm{cotg}\frac{C}{2} & c^2+\gamma^2 \end{vmatrix} = 0,$$

α, β, γ fiind segmentele cuprinse între vârfuri și ortocentru.

COSTACHESCU V. C-TIN

Soluție dată de d-nii: *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București) și *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Leoberi, Austria).

Sunt cunoscute relațiile:

$$a = 2R\cos A,\quad \beta = 2R\cos B,\quad \gamma = 2R\cos C$$

$$a = 2R\sin A,\quad b = 2R\sin B,\quad c = 2R\sin C.$$

De unde:

$$(1)\qquad a^2+\alpha^2 = b^2+\beta^2 = c^2+\gamma^2 = 4R^2$$

Apoi:

$$(2)\qquad a\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} + a\,\mathrm{cotg}\frac{A}{2} = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{2a}{\sin A} = 4R$$

$$b\,\mathrm{tg}\frac{B}{2} + b\,\mathrm{cotg}\frac{B}{2} = c\,\mathrm{tg}\frac{C}{2} + c\,\mathrm{cotg}\frac{C}{2} = 4R,$$

Luân determinantul dat pe care să'l însemnăm cu Δ, adunându-i la elementele coloanei întâi pe acelea ale coloanei a 2^a și ținând de relațiile (1) și (2), putem scri:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4R & a\,\mathrm{cotg}\frac{A}{2} & 4R^2 \\ 4R & b\,\mathrm{cotg}\frac{B}{2} & 4R^2 \\ 4R & c\,\mathrm{cotg}\frac{C}{2} & 4R^2 \end{vmatrix} =$$

$$16R^3\begin{vmatrix} 1 & a\,\mathrm{cotg}\frac{A}{1} & 1 \\ 1 & b\,\mathrm{cotg}\frac{B}{2} & 1 \\ 1 & c\,\mathrm{cotg}\frac{C}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

determinantul ultim, având două coloane egale.

Soluții date de d-nii: *Dimitriu G. Ștefan* (lic. Milit., Iași), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași).

Vom folosi relațiile cunoscute; (Compléments de Trigonométrie par F. J. 195).

$$a\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} = r_a - r,\quad b\,\mathrm{tg}\frac{B}{2} = r_b - r,\quad c\,\mathrm{tg}\frac{C}{2} = r_c - r,$$

$$a\,\mathrm{cot}\frac{A}{2} = r_b + r_c,\quad b\,\mathrm{cotg}\frac{B}{2} = r_a + r_c,$$

$$c\,\mathrm{cotg}\frac{C}{2} = r_a + r_b$$

$$a^2+\alpha^2 = b^2+\beta^2 = c^2+\gamma^2 = 4R^2.$$

Determinantul dat Δ, se poate scri:

$$\Delta = \begin{vmatrix} r-r_a & r_b+r_c & 4R^2 \\ r-r_b & r_a+r_c & 4R^2 \\ r-r_c & r_a+r_b & 4R^2 \end{vmatrix} =$$

$$4R^2 \begin{vmatrix} r-(r_a+r_b+r_c) & r_b+r_c & 1 \\ r-(r_a+r_b+r_c) & r_a+r_c & 1 \\ r-(r_a+r_b+r_c) & r_a+r_b & 1 \end{vmatrix} =$$

$$4R^2\left[r-(r_a+r_b+r_c)\right] \begin{vmatrix} 1 & r_b+r_c & 1 \\ 1 & r_a+r_c & 1 \\ 1 & r_a+r_b & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ca având două coloane egale.

Alte soluții date de d-nii: *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Cernăuți Iosif* (lic. Timișoara), *Dimitriu At. Ion* (lic. Galați), *Floareș I. Mircea* (lic Bacău), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Popovici M.* (Focșani), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Tudose Tănase* (lic. Câmpina).

PROBLEME PROPUSE

617[1]. Să se găsească patratul perfect de forma $abac$, unde să avem $b+c=a$, b și c fiind diferiți de a.

IONESCU GH. VIRGIL

661. — Se dă un triunghiu isoscel ABC. Fie A_1 piciorul perpendicularei dusă din A pe BC. Bisectoarele unghiurilor A_1AB și A_1AC taie fiecare din bisectoarele unghiurilor B și C. Se obțin patru puncte care sunt vârfurile unui trapez isoscel

COSNITA CEZAR

662. — Fie $A'B'C'$ triunghiul format de bisectoarele exterioare ale unui triunghiu ABC.

Să se construiască triunghiul ABC, când se cunoaște punctul A și centrele cercurilor circumscrise celor două triunghiuri.

NICOLAE I. MANOLESCU

663. — Să se rezolve ecuația:

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0,$$

și să se determine relația de condiție ce trebue să existe între coeficienții ei astfel ca între rădăcini să avem relația:

$$\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{x_3+x_4}{2}.$$

AURELIAN I. STAN

629[2]. — Să se rezolve ecuația:

$$27x^{10}-18x^7\sqrt{x}+x^5\sqrt{x}=a.$$

VIRGILIU GR. DANCIULESCU

664. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{\sin 7t}{\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cos 3t} =$$

$$2^4\sin t\left(\cos t-\cos\frac{\pi}{7}\right)\left(\cos t-\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(\cos t-\cos\frac{5\pi}{7}\right)$$

V. ALACI

665. — Să se stabilească identitatea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 8R\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{B-A}{2},$$

α, β, γ fiind segmentele cuprinse între vârfuri și ortocentru; iar α', β', γ' fiind segmentele cuprinse între ortocentru și laturi într'un triunghiu ABC.

COSTACHESCU V. C.

Observare. Problema publicată sub No. 628, a apărut incomplectă. Ea trebuie rectificată astfel:

Fie $A_1B_1C_1$ *triunghiul format prin ducerea paralelelor prin mijloacele segmentelor cuprinse între vârfuri și ortocentrul triunghiului* ABC, *la laturile triunghiului său ortic.*

1°. Să se demonstreze că triunghiurile ABC *și* $A_1B_1C_1$ *sunt ortologice.*

2°. Să se construiască triunghiul ABC, *cunoscând triunghiul* $A_1B_1C_1$.

AURELIAN I. STAN

1) Problema din acest număr din No. 1, se anulează și se înlocuește cu prezenta de oarece a mai fost piublcată în anul V, pag. 110, sub No. 480 și rezolvată tot acolo la pag. 157.

2) Problema cu acest număr din No. 2. a. c., se anulează și se înlocuește cu prezenta, fiind analoagă cu problema No. 383, propusă în anul IV, pag. 110 și rezolvată în anul V, pag. 7.

INFORMAȚIUNI

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fie care la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VII. 15 OCTOMBRIE 1927 No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. C. IONESCU-BUJOR. PUNCTE COLINEARE IN LEGATURA CU CATEVA AXE RADICALE.
2. NOTE MATEMATICE, 15, 16, 17.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 619, 620, 627, 630, 631
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Adminstraţia Revistei, şi se poate procura în himibul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.
Anul VI, broşat, 80 lei.

ANUL VII — NO. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMBRIE 1927.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

PUNCTE COLINEARE IN LEGATURA CU CATEVA AXE RADICALE

de C. IONESCU-BUJOR

Voiu înfățișa câteva proprietăți, care în aparență disparate, sunt legate însă strâns, întrucât în miezul tuturor se va recunoaște o cale unică. Vom păstra, în general, notațiile clasice ale geometriei triunghiului: O centrul cercului circumscris triunghiului de referință, I centrul cercului înscris, H ortocentrul, K punctul lui *Lemoine*, N punctul lui *Gergonne* și T centrul cercului lui *Taylor*.

1°. *a) In triunghiul* ABC, *fie* E_a, E_b, E_c *cele trei puncte euleriene. Perpendicularele din* A, B, C, *pe* OE_a, OE_b, OE_c *întâlnesc laturile* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ *ale triunghiului ortic în trei puncte situate pe axa ortică a triunghiului* ABC.

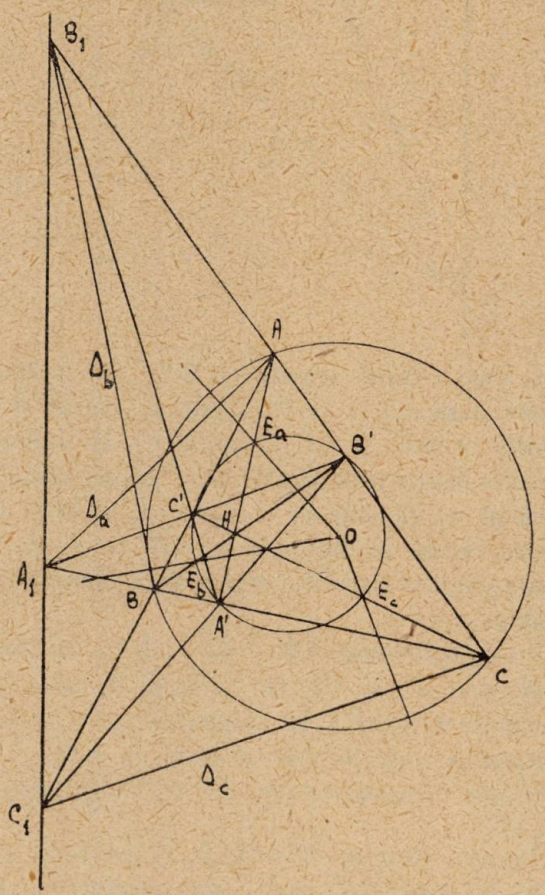
Punctul E_a este centrul cercului $AB'C'$, încât perpendiculara Δ_a din A pe OE_a este ax radical al cercurilor $AB'C'$ și ABC; de asemenea $B'C'$ este ax radical al cercului lui *Euler* cu $AB'C'$. Dreptele Δ_a, $B'C'$ se întâlnesc în punctul A_1, care fiind centrul radical al celor trei cercuri menționate, se găsește pe axa radicală a cercului circumscris și cercului lui *Euler*, deci pe axa ortică a triunghiului ABC. Demonstrație analoagă pentru celelalte puncte B_1 și C_1.

b) Dar se știe că axa ortică este polara trilineară a ortocentrului, deci trece prin punctele de întâlnire ale laturilor triunghiului ortic cu respectivele lor în triunghiul de referință. Conchidem astfel că punctele A_1, B_1, C_1 se găsesc și pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC.

In cât putem enunța:

In triunghiul ABC, *fie* E_a, E_b, E_c *cele trei puncte euleriene. Perpendicularele din* A, B, C *pe* OE_a, OE_b, OE_c *întâlnesc laturile* BC, CA, AB *în trei puncte situate pe axa ortică.*

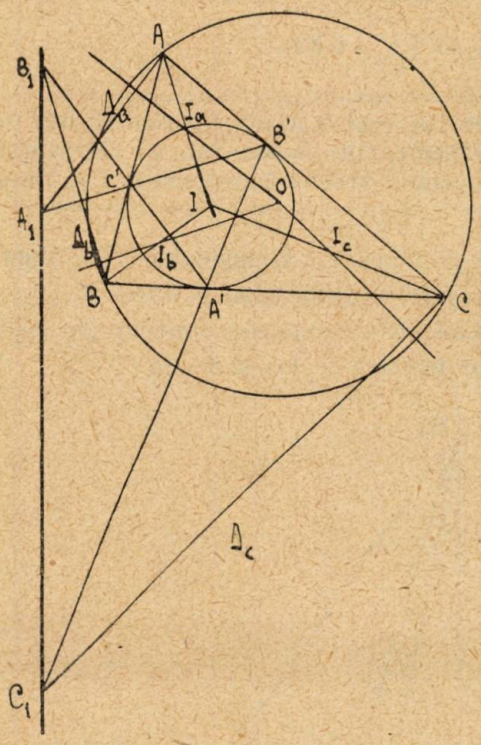
c) Axa ortică a triunghiului ABC fiind polară trilineară a ortocentrului, punctele A_1, B_1, C_1 vor fi picioarele conjugatelor armonice ale înălțimelor, în cât teorema ar lua și forma:



Conjugatele armonice ale înălțimelor unui triunghiu ABC, *sunt perpendiculare pe dreptele care unesc centrul cercului circumscris cu punctele euleriene corespunzătoare.*

2°. *In triunghiul* ABC, *fie* I_a, I_b, I_c *mijloacele segmentelor* IA, IB, IC. *Perpendicularele din* A, B, C *pe* OI_a, OI_b, OI_c *întâlnesc laturile* $B'C'$,

$C'A'$, $A'B'$ *ale triunghiului pedal al punctului* I *în trei puncte situate pe axul radical al cercurilor înscris și circumscris.*

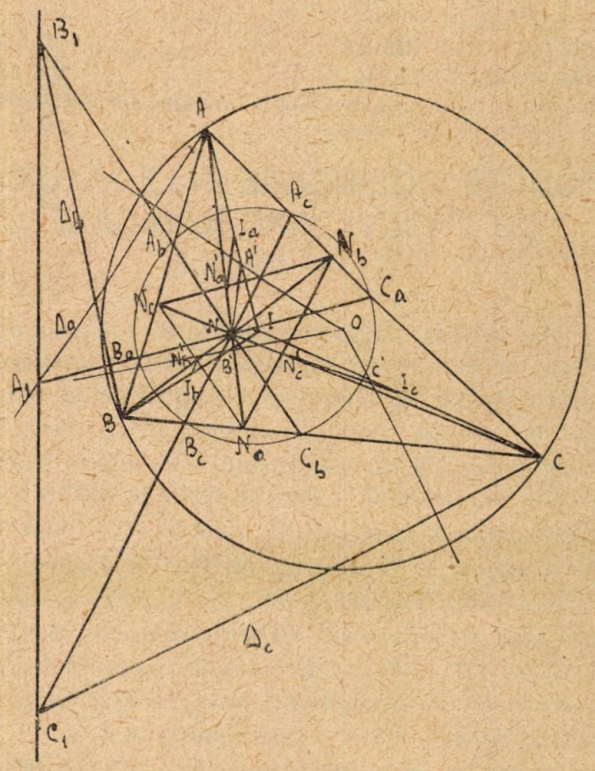


I_a fiind centrul cercului $AB'C'$, Δ_a perpendiculara dusă din A pe OI_a este ax radical al cercurilor $AB'C'$ și ABC, iar $B'C'$, ax radical a cercului înscris triunghiului ABC cu cercul $AB'C'$. Punctul A_1 de întâlnire al axelor Δ_a și $B'C'$ fiind centru radical al celor trei cercuri, se va găsi pe axul radical al cercurilor înscris și circumscris triunghiului ABC.

3°. *In triunghiul* ABC, *fie* I_a, I_b, I_c *mijloacele segmentelor* IA, IB, IC *și* $N'_aN'_bN'_c$ *triunghiul pedal de ordinul 2 al punctului lui Gergonne. Paralelele duse prin acest punct la* $I_aN'_a$, $I_bN'_b$, $I_cN'_c$ *tae bisectoarele* IA, IB, IC *în punctele* A', B', C'.

Perpendicularele din A, B, C *pe* OA', OB', OC' *tae paralelele duse prin punctul lui Gergonne la bisectoarele exterioare în trei puncte situate pe axul radical al cercului circumscris și cercului lui Adams.*

Fie B_a, C_a punctele în care paralela dusă prin punctul N, al lui *Gergonne* la bisectoarea exterioară a vârfului A, tae laturile AB și AC. Dreapta B_aC_a este deci prin ipoteză paralelă cu N_bN_c, latură a triunghiului pedal de ordinul 1 al punctului N. Triunghiurile AB_aC_a și AN_bN_c sunt omotetice, așa că A' omologul lui I_a, centrul cercului AN_bN_c, este centru al cercului AB_aC_a. Se



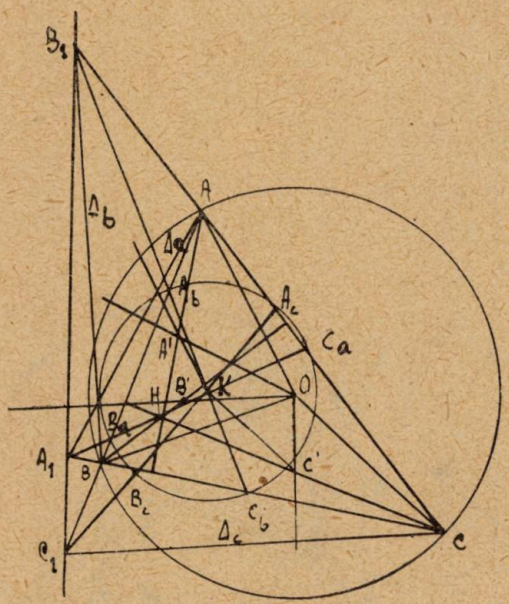
știe că punctele B_a, C_a și cele patru analoage sunt pe cercul lui *Adams* al cărui centru este punctul I, deci B_aC_a este ax radical al cercului AB_aC_a cu cercul lui *Adams*. Perpendiculara din A pe OA' fiind ax radical al cercului ABC cu AB_aC_a. intersecția ei A_1 cu B_aC_a este centru radical al celor trei cercuri. Prin A_1 trece axul radical al cercului lui *Adams* cu cercul circumscris. Analoagă demonstrație pentru B_1 și C_1.

4°. *a) In triunghiul* ABC, *paralelele duse prin punctul lui Lemoine la diametrii* OA, OB, OC *întâlnesc înălțimele* HA, HB, HC *în* A', B', C'.

Perpendicularele coborâte din A, B, C *pe* OA', OB', OC' *întâlnesc antiparalelele corespunzătoare, duse prin punctul lui Lemoine la laturile lui* ABC, *în trei puncte situate pe axul radical al cercului al doilea al lui Lemoine și cercului circumscris.*

Fie B_a, C_a punctele în care antiparalela la latura BC tae respectiv laturile AB și AC. Al doilea cerc al lui *Lemoine* (L_2) trece prin punctele B_a, C_a și analoagele, în cât dreapta $B_a C_a$ este ax radical al cercurilor (L_2) și $AB_a C_a$.

Pentrucă $B_a C_a$ este antiparalela laturii BC, centrul cercului $AB_a C_a$ se găsește pe izogonala diametrului AO în unghiul BAC, adică pe înălțimea AH și este chiar A', întrucât dreapta KA' fiind paralelă cu diametrul OA este perpendiculară pe toate antiparalelele laturii BC deci și pe $B_a C_a$ și astfel KA' este distanța centrelor cercurilor L_2 și $AB_a C_a$.



Δ_a, perpendiculara dusă din A pe OA' este așa dar axa radicală a cercurilor $AB_a C_a$ și ABC, iar A_1 punctul în care Δ_a tae dreapta $B_a C_a$ este centrul radical al celor trei cercuri ale problemei. Conchidem că prin A_1 trece axul radical al cercului circumscris cu al doilea cerc al lui *Lemoine*.

b) Să ținem seamă de următoarea proprietate stabilită în articolul „Asupra câtorva cercuri remarcabile într'un triunghiu" *(Curierul Matematic*, vol. II, pag. 147).

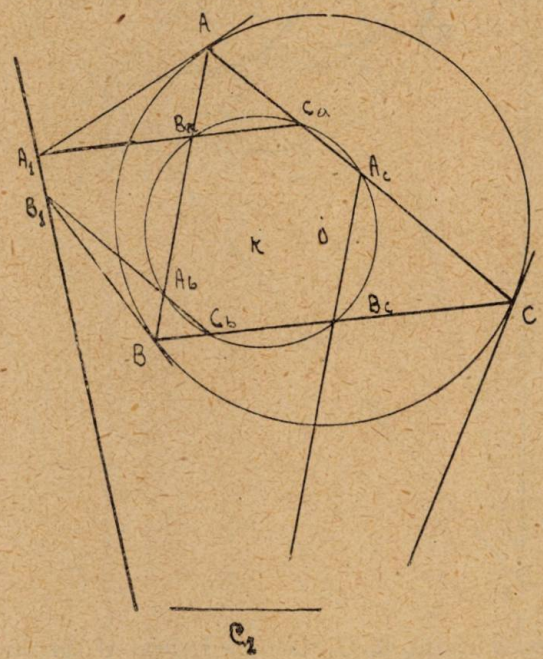
„Antiparalelele duse prin punctul lui *Lemoine* la laturile triunghiului de referință, tae laturile respective în trei puncte situate pe axul radical al cercului circumscris cu al doilea cerc al lui *Lemoine*.

Apropiind acest rezultat de acel precedent, putem enunța proprietatea:

Intr'un triunghiu ABC, *fie* A', B', C' *punctele în care paralelele duse prin punctul lui Lemoine la diametrii* OA, OB, OC *întâlnesc înălțimele* HA, HB, HC. *Perpendicularele duse din* A, B, C *pe* OA', OB', OC' *întâlnesc laturile* BC, CA, AB *în trei puncte pe axul radical al cercului al doilea al lui Lemoine cu cercul circumscris.*

5. *Tangentele la cercul circumscris triunghiului* ABC *în punctele* A, B, C, *tae laturile exagonului determinat de al doilea cerc al lui Lemoine prin intersecția laturilor triunghiului de referință opuse laturilor lui* ABC *în trei puncte situate pe axul radical al cercului al doilea al lui Lemoine cu cercul circumscris.*

Fie $B_a C_a$ latura exagonului format prin întâlnirea cercului al doilea al lui *Lemoine* cu triunghiul ABC, opusă laturii BC. Se demonstrează ușor și e de altfel cunoscut paralelismul dreptelor $B_a C_a$, BC (Exercices de Géométrie par F. G. M., Ed. VI, pag. 1189). Intru cât cercurile ABC și $AB_a C_a$ sunt tangente (Revista Matematică din Timișoara, vol. VI, problema 465, pag. 90), și deci tangenta la ABC în A este axul lor radical.



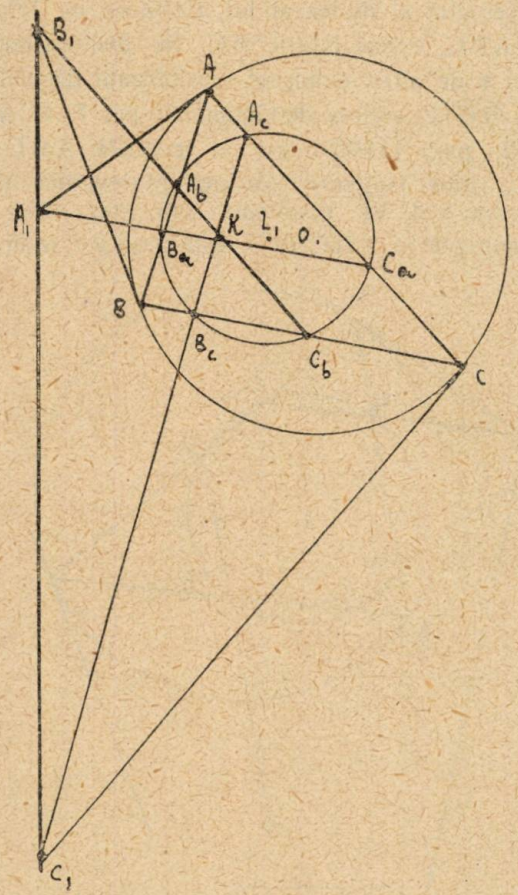
De altă parte, axul radical al cercurilor $AB_a C_a$ și (L_2), al doilea cerc al lui *Lemoine*, fiind dreapta

$B_a C_a$, A_1 punctul în care tangenta, dusă la ABC în vârful A, întâlneşte dreapta $B_a C_a$ este centru radical al celor trei cercuri. Se deduce astfel concluzia: A_1 e pe axul radical al cercului circumscris cu al doilea cerc al lui *Lemoine*, etc.

Având în vedere rezultatele obţinute, proprietăţile (3 *b*) şi (4) evidenţiază un sistem de şase puncte colineare.

6°. *Tangentele duse prin* A, B, C *la cercul circumscris triunghiului* ABC *întâlnesc paralelele duse prin punctul lui Lemoine la* BC, CA, AB *în trei puncte situate pe axul radical al primului cerc al lui Lemoine cu cercul circumscris.*

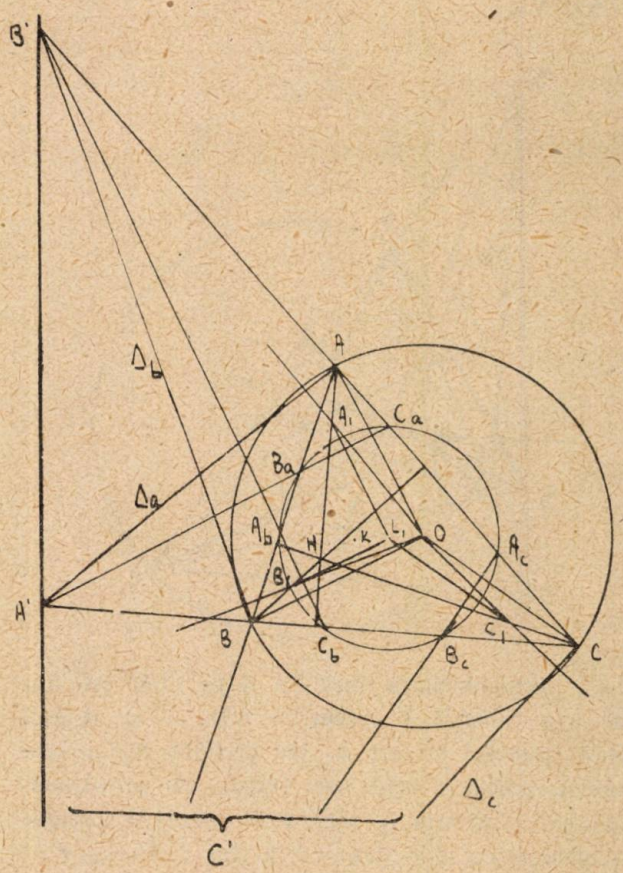
Fie B_a, C_a punctele în care paralelele duse prin K la BC tae laturile AB, AC. Se ştie că B_a, C_a şi celelalte patru puncte analoage se găsesc pe primul cerc al lui *Lemoine*.



Acestea spuse, $B_a C_a$ este ax radical al cercului $AB_a C_a$ cu primul cerc al lui *Lemoine* (L_1), iar tangenta în A la cercul ABC este ax radical al cercurilor tangente ABC şi $AB_a C_a$. In cât A_1, punctul în care ace stă tangentă întâlneşte dreapta $B_a C_a$ fiind centrul radical al celor trei cercuri, se află pe axul radical al cercului ABC şi L_1.

7°. *In triunghiul* ABC, *paralelele duse prin centrul primului cerc al lui Lemoine la* OA, OB, OC *întâlnesc înălţimile* HA, HB, HC *în* A_1, B_1, C_1.

Perpendicularele din A, B, C *pe* OA_1, OB_1, OC_1 *întâlnesc laturile* BC, CA, AB *în trei puncte pe axul radical al primului cerc al lui Lemoine cu cercul circumscris.*



Primul cerc al lui *Lemoine* (L_1) tae laturile triunghiului ABC în 6 puncte ce determină un exagon, trei din laturile căruia sunt chiar laturi ale triunghiului ABC, iar celelalte trei fiind antiparalele cu BC, CA, AB.

Fie $B_a C_a$ latura exagonului lui *Lemoine* opusă laturii BC. Aceleaşi consideraţiuni ca la punctul (3 *a*) ne arată că A_1 este centrul cercului $AB_a^{\prime} C_a$.

Axul radical al cercurilor AB_aC_a şi (L_1) este dreapta B_aC_a, iar ax radical al cercurilor ABC şi AB_aC_a este Δ_a, perpendiculara dusă din A pe distanţa centrelor OA_1.

A′ intersecţia dreptelor B_aC_a şi Δ_a, fiind centrul radical al celor trei cercuri, se va găsi şi pe axul radical al cercului L_1 şi ABC. Demonstraţie analoagă dovedeşte că punctele B′, C′ se găsesc de asemenea pe acest ax radical. Dacă ţinem seama însă de proprietutea :

„Laturile opuse ale exagonului format din punctele în care primul cerc al lui *Lemoine* tae laturile triunghiului de referinţă, se tae în trei puncte situate pe axul radical al cercului circums ris şi primului cerc al lui *Lemoine*“, publicată în Curierul Matematic, vol. II, pag, 145, conchidem proprietatea enunţată.

Vom observa din nou că proprietăţile 6° şi 7° dau naştere unui nou sistem de puncte colineare.

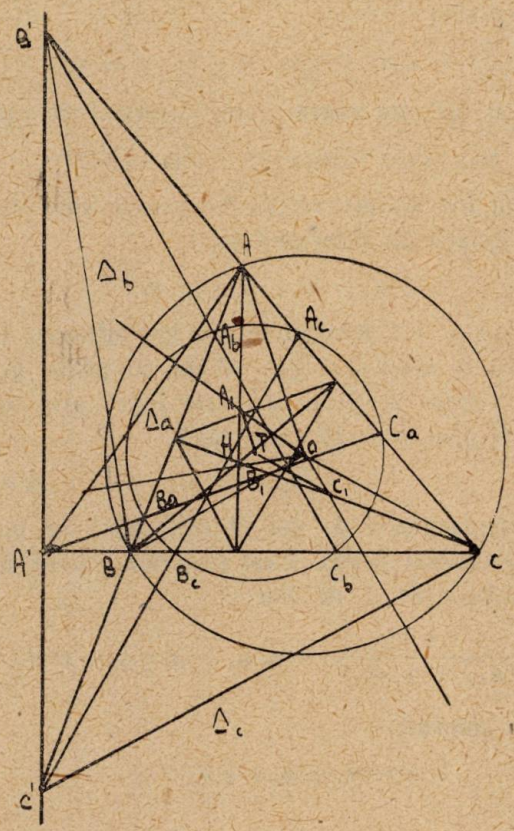
8°. *a) Paralelele duse prin centrul cercului lui Taylor la* OA, OB, OC *întâlnesc înălţimele* HA, HB, HC *în* A_1, B_1, C_1.

Perpendicularele duse din A, B, C *pe* OA_1, OB_1, OC_1, *întâlnesc laturile corespunzătoare ale complimentarului triunghiului ortic în trei puncte situate pe axul radical al cercurilor lui Taylor şi circumscris.*

Se ştie că fiecare latură a complimentarului triunghiului ortic întâlneşte câte două din laturile triunghiului de referinţă în două puncte pe cercul lui *Taylor* şi că aceste coarde ale sale sunt antiparalele cu laturile triunghiului de referinţă în unghiurile opuse. Fie B_aC_a antiparalela laturii BC. Având în vedere demonstraţiile anterioare, se vede că A_1 este centru al cercului AB_aC_a. Axul radical al acestui cerc cu cercul lui *Taylor* este B_aC_a, iar Δ_a perpendiculara din A pe OA_1 este ax radical al cercului AB_aC_a cu ABC. Astfel că $A'(B_aC_a, \Delta_a)$ va fi centru radical al celor trei cercuri şi deci e situat pe axul radical al cercurilor *lui Taylor* şi circumscris.

b) Se ştie că laturile complimentarului triunghiului ortic sunt diagonale ale exagonului format din cele 6 puncte în care cercul lui *Taylor* tae laturile triunghiului de referinţă, Sprijiniţi pe această observaţie, proprietatea publicată în C. M., vol. II, la pag. 148.

„Diagonalele vârfurilor opuse ale exagonului, determinat de cercul lui *Taylor* pe laturile triunghiului de referinţă, tae laturile respective ale acestui triunghiu în trei puncte situate pe axul radical al cercurilor lui *Taylor* şi circumscris“ ne conduce la următoarea chestiune :



In triunghiul ABC, *paralelele duse prin centrul cercului lui Taylor la* OA, OB, OC *întâlnesc înălţimele* HA, HB, HC *în* A_1, B_1, C_1.

Perpendicularele din A, B, C *pe* OA_1, OB_1, OC_1 *întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului de referinţă, pe axul radical al cercului lui Taylor cu cercul circumscris.*

* * *

Proprietăţile expuse deşi în aparenţă deosebite, cum am spus şi cum s'a văzut în cursul demonstraţiilor, sunt strâns legate prin o cale comună urmată în deducţia lor.

Nu prezintă interes numai faptul că s'au găsit grupe de puncte ce determină drepte importante, dar şi acel că apar construcţii uşoare a acestor drepte, axe radicale a unor cercuri remarcabile, construcţii care nu cer prezenţa însăşi a cercurilor.

NOTE MATEMATICE

15. *Asupra unui articol.* D-l *M. Ghermănescu* într'un articol intitulat „Seriile recurente şi ecuaţiile integrale" din G. M., vol. XXXII, p. 85, dă o expresie a coeficientului u_n care verifică relaţia de recurenţă:

(1) $u_{n+1} + a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \ldots + a_n u_0 = 0.$

Acest caz este generalizarea cazului finit când:

2) $u_{m+i+1} + a_0 u_{m+i} + \ldots + a_m u_i = 0.$

m fiind fix. Totuşi câteva observaţii sunt necesare. Relaţia (2) determină şirul:

$$\ldots u_{-2} \quad u_{-1} \quad u_0 \quad u_1 \quad u_2 \ldots.$$

din care $m+1$ termeni se pot lua arbitrar. Evident că în acest sens general nu se poate generaliza relaţia (2). Şirul care este legat prin relaţiile (1) generalizează cazul când:

$$u_m = 0 \qquad m < 0.$$

Formula găsită de d-l *Ghermănescu* se poate stabili imediat pentru acest caz, fără ecuaţii integrale. Relaţiile (1) ne dau:

$$\frac{1}{1 + a_0 x + a_1 x^2 + \ldots} = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots$$

Dar punând:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

avem:

$$\frac{1}{1 + a_0 x + a_1 x^2 + \ldots} = \frac{1}{1 + x\varphi(x)} = 1 - x\varphi(x) + x^2\varphi^2(x) - \ldots$$

şi scoatem formula cerută prin egalarea coeficienţilor:

$$u_m = -[\infty, 1]_{m-1} + [\infty, 2]_{m-2} + \ldots \ldots + (-1)^m [\infty, m]_0$$

după notaţiile d-lui *Ghermănescu*.

TIB. POPOVICIU

16. *Asupra centrelor conicelor înscrise într'un triunghiu.* Fie A B C un triunghiu oarecare: se consideră conicele înscrise în acest triunghiu; se cere locul centrelor acestor conice când:

1) *Aria triunghiului* A B_1 C_1 *este constantă* (B_1 şi C_1 *puncte de contact respectiv pe* A C *şi* A B).

Vom alege ca axe (A B, A C): conica tangentă la A B şi A C are drept ecuaţie tangenţială:

(1) $\lambda w^2 + b\, w v + b' u w + b'' u v = 0.$

Scriu că este tangentă la B C care tangenţial se exprimă prin $\left(-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}, 1\right)$: aceste coordonate verifică (1):

$$\lambda = \frac{b}{\beta} + \frac{b'}{\alpha} - \frac{b''}{\alpha\beta}.$$

Ecuaţia contactului B_1 este:

$$u f'_u(0, 1, 0) + v f'_w(0, 1, 0) + w f'_w(0, 1, 0) = 0$$

sau: $$u b'' + \omega b = 0.$$

Ecuaţia contactului C_1 este:

$$u f'_u(1, 0, 0) + v f'_v(1, 0, 0) + w f'_w(1, 0, 0) = 0$$

sau: $$v b'' + w b' = 0.$$

Deci punctual B_1 şi C_1 au coordonatele:

$$\left(\frac{b''}{b}, 0\right), \quad \text{şi} \quad C_1\left(0, \frac{b''}{b'}\right).$$

Ecuaţia tangenţială a centrelor conicelor:

$$f'_w = 0 = 2\left(\frac{b}{\beta} + \frac{b'}{\alpha} - \frac{b''}{\alpha\beta}\right) w + b v + b' u = 0$$

deci x, y fiind coordonatele lui punctuale vom avea:

$$2x = \frac{b'}{\frac{b}{\beta} + \frac{b'}{\alpha} - \frac{b''}{\alpha\beta}}, \quad 2y = \frac{b}{\frac{b}{\beta} + \frac{b'}{\alpha} - \frac{b''}{\alpha\beta}}.$$

Deduc repede:

(2) $$\frac{b}{\beta} + \frac{b'}{\alpha} - \frac{b''}{\alpha\beta} = \frac{b''}{\alpha\beta} \times \frac{1}{\left[2\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right) - 1\right]} = \frac{b'}{2x} = \frac{b}{2y}$$

suprafaţa triunghiului A B_1 C_1 este:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{b''}{b} \cdot \frac{b''}{b'} \sin\theta = k; \qquad \left(\hat{\theta} = \widehat{BAC}\right)$$

sau: $$\frac{2k}{\sin\theta} = k_1 = \frac{b''}{b} \times \frac{b''}{b'}.$$

Dar din (2) scot rapoartele $\frac{b''}{b}$ și $\frac{b''}{b'}$ în funcție de x și y. Locul este conica:

$$4\left[\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{2}{a\beta}-k_1\right)xy+\frac{y^2}{\beta^2}\right]-2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{b}\right)+1=0.$$

2) *Când* $\overline{C_1B_1}^2=k^2$ *locul este o cuadrică:*

$$\overline{C_1B_1}^2=k^2=\frac{b''^2}{b'^2}+\frac{b''^2}{b^2}-2\frac{b''}{b}\times\frac{b''}{b'}\cos\theta$$

sau făcând înlocuirile: obțin cuadrica:

$$\left[2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)-1\right]^2[x^2+y^2-2xy\cos\theta]=\frac{4k^2}{\alpha^2\beta^2}x^2y^2$$

Această cuadrică admite A ca focar: căci din A pot duce tangente imaginare la cuadrică:

In cazul particular $\alpha=\beta=1$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ tangentele în origina (A) sunt $x^2+y^2=0$.

3) Când contactul B_1 este dat, locul este o dreaptă care trece prin mijlocul lui BB_1

Coordonatele punctuale ale lui $B_1=\left(\frac{b''}{b},\ 0\right)$.

Deci $\frac{b''}{b}=k$. Dar (2) ne dă:

$$\frac{b''}{\alpha\beta}\times\frac{1}{2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)-1}=\frac{b}{2y}$$

deci $$k=\frac{\alpha\beta\left[2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)-1\right]}{2y}$$ sau:

$$2\beta x+2(\alpha-k\beta)y-\alpha\beta=0.$$

EMANOIL G. GAIU

17. *Asupra problemei No. 368.* (Rezolvată în R. M. T., anul IV, No. 12, pag. 186).

Problema 368 se poate generaliza astfel.

In orice triunghiu avem relația:

$$\frac{2^n r^n}{a^n\cdot b^n\cdot c^n}\left(a^n r_a^n+b^n r_b^n+c^n r_c^n\right)=\sum\left(\frac{h_a-h_b}{r_b-r_a}\right)^n$$

Folosim formulele cunoscute:

$$h_a=\frac{2s}{a}\ \text{etc.};\quad r_a=\frac{s}{p-a}\ldots\text{etc.}$$

$$p(p-a)(p-b)(p-c)=s^2,\quad s=pr$$

și observăm că putem scrie succesiv:

$$\sum\left(\frac{h_a-h_b}{r_b-r_a}\right)^n=\sum\frac{\left(\frac{2s}{a}-\frac{2s}{b}\right)^n}{\left(\frac{s}{p-b}-\frac{s}{p-a}\right)^n}=$$

$$\sum\frac{2^n(p-a)^n(p-b)^n}{a^n b^n}=\sum\frac{2^n p^n(p-a)^n(p-b)^n(p-c)^n}{p^n(p-c)^n\cdot a^n\cdot b^n}$$

$$=\sum\frac{2^n s^{2n}}{p^n(p-c)^n\cdot a^n\cdot b^n}=\sum\frac{2^n s^n r_c^n}{p^n\cdot a^n\cdot b^n}=$$

$$\frac{2^n r^n}{a^n\cdot b^n\cdot c^n}\left(a^n r_a^n+b^n r_b^n+c^n r_c^n\right)$$

VIRGILIU GR DANCIULESCU

BIBLIOGRAFIE

Gazeta Matematică, anul XXXIII, Septembrie 1927.

Lista Membrilor Societății „Gazeta Matematică". Membrii decedați. Premiile și alte dispoziții ale fondurilor „Gazetei Matematice" de *I. Bușilă* și *G. A. Ioachimescu*. Asupra unor cercuri care au ca centre două puncte inverse, de *N. Blaha*.

PROBLEME REZOLVATE

619. — *Se dă triunghiul* ABC. *Fie* A', B', C', *punctele unde înălțimele acestui triunghiu întâlnesc cercul circumscris* ABC.

Dreptele A'B', A'C', *întâlnesc respectiv laturile* AC *și* AB *în* M *și* N. *Să se arate că punctele* M, N, H *sunt colineare,* H *fiind ortocentrul triunghiului* ABC.

ȘT. MUSTA

Soluție dată de d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu Gh. Ștefan* (lic. Milit., Iași) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași).

Aplicăm teorema lui *Pascal* exagonului A'B'BACC' înscris în cercul ABC și conchidem că punctele M, N, H de întâlnire ale laturilor opuse (AB, A'C'), (A'B', AC), (BB', CC'), sunt colineare.

Observare. D-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova) și *Stan I. Aurelian*, arată că concluziile problemei se mențin, când înlocuim cercul cu o conică, și înălțimele prin niște ceviene oarecare, teorema lui *Pascal* aplicând-se și în acest caz.

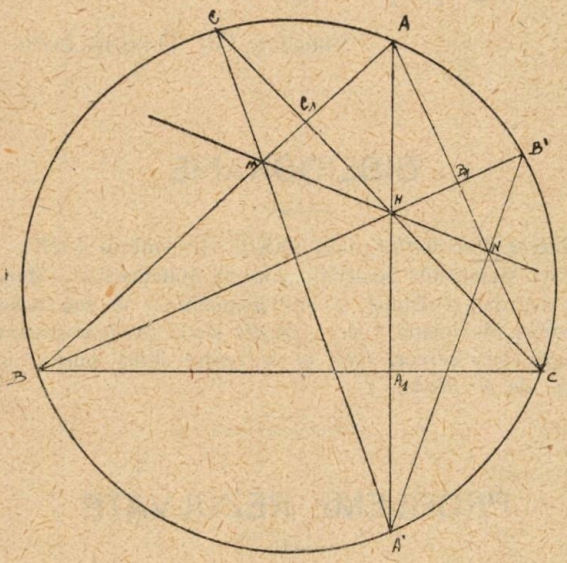
Altă soluție. E de ajuns să dovedim, că:

$$\widehat{MHC'} = \widehat{NHC}.$$

Observăm că:

$$\widehat{C'AB} = \widehat{C'CB} = \widehat{A'AB},$$

primele două ca fiind înscrise și având aceiași



măsură, iar ultimele două ca având același compliment, unghiul A B C. Rezultă că A B este perpendiculară pe C' H în mijlocul său și deci putem scri:

$$(1) \qquad \widehat{MHC'} = \widehat{MC'C}.$$

Tot astfel:

$$\widehat{B'CA} = \widehat{B'BA} = \widehat{ACH},$$

primele două fiind înscrise și având aceiași măsură, ultimele două, având același compliment, unghiul B A C. Rezultă că A C este perpendiculară pe B'H n mijlocul său, putem deci scri:

$$\widehat{CHB'} = \widehat{CB'B}$$

$$\widehat{NHB'} = \widehat{NB'B},$$

pe care scăzându-le obținem:

$$(2) \qquad \widehat{NHC} = \widehat{NB'C} = \widehat{A'B'C}.$$

Cum:

$$\widehat{A'B'C} = \widehat{A'C'C} = \widehat{MC'C},$$

ca având aceiași măsură, rezultă că ultimii membrii din egalitățile (1) și (2) sunt egali, deci și primii, adică:

$$\widehat{MHC} = \widehat{NHC'},$$

și deci punctele M, H, N sunt coliniare.

Soluții date de d-nii: *Aldea Nicolae* (lic. M-rea Dealul), *Apăteanu T. Alexandru* (lic. Arad), *Balaban I.* (lic. Bârlad), *Călinescu I. Aurelian* (Zimnicea), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iași), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Dinu S. D-tru* (Șc. de Conducători, Chișinău), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Feldstein Solomon* (lic. Pitești), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu C. C-tin* (Șc. Polit, Timișoara), *Grațian I. Tănase* (lic. Arad), *Hohoi V.* (Brașov), *Ionescu Gh. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Levi Jacques* (lic. Matei-Basarab, București), *Mărculescu I. Origen* (lic. Carol, Craiova), *Mocuța Traian* (lic. Arad), *Murărolu Ionel* (lic. Brașov), *Pascu Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Popa L. Victor* (lic. Arad), *Popescu Gh. Ovidiu* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popescu N. Ioan* (Cluj), *Popovici Mihai* (Focșani), *Rămniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Savin Ioan* (lic. Milit., Iași), *Sântibreanu Cornel* (Șc. Polit. Timișoara), *Scurtu N.* (lic. Brașov), *Steblea Șt. Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Tarția Valer Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Satu-Mare) și *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori, Chișinău).

620. — *Să se demonstreze identitatea:*

$$\frac{a(a+2)}{(a-2b)(a-3c)(a-4d)} + \frac{2b(b+1)}{(2b-a)(2b-3c)(b-2d)} + \frac{3c(3c+2)}{(3c-a)(3c-2b)(3c-4d)} = \frac{2d(4d+2)}{(4d-a)(2d-b)(3c-2d)}$$

RUSANDA GHEORGHE

Soluție dată de d-l *Goldstein G. A.* (lic. Mihai-Viteazul, București).

Descompunem primul termen, astfel:

$$(1) \qquad \frac{a(a+2)}{(a-2b)(a-3c)(a-4d)} = \frac{A}{a-2b} + \frac{B}{a-3c} + \frac{C}{a-4d},$$

și căutăm să determinăm pe A, B, C.

Inmulțim cu $(a-2b)$ și făcând apoi, $a=2b$, găsim:

$$A=\frac{2b(2b+2)}{(2b-3c)(2b-4d)}=\frac{2b(b+1)}{(2b-3c)(b-2d)}$$

Inmulțind egalitatea (1) cu $(a-3c)$ și făcând apoi, $a=3c$, găsim:

$$B=\frac{3c(3c+2)}{(3c-2b)(3c-4d)}.$$

In fine, înmulțind (1) cu $(a-4d)$ și făcând apoi $a=4d$, găsim:

$$C=\frac{4d(4d+2)}{(4d-2b)(4d-3c)}=\frac{2d(4d+2)}{(2d-b)(4d-3c)}$$

Inlocuind în (1) valorile lui A, B, C, avem:

$$\frac{a(a+2)}{(a-2b)(a-3c)(a-4d)}=\frac{2b(b+1)}{(a-2b)(2b-3c)(b-2d)}+$$
$$\frac{3c(3c+2)}{(a-3c)(3c-2b)(3c-4d)}+\frac{2d(4d+2)}{(a-4d)(2d-b)(4d-3c)}$$

care se mai poate scri, evident.

$$\frac{a(a+2)}{(a-2b)(a-3c)(a-4d)}+\frac{2b(b+1)}{(2b-a)(2b-3c)(b-2d)}+$$
$$\frac{3c(3c+2)}{(3c-a)(3c-2b)(3c-4d)}=\frac{2d(4d+2)}{(4d-a)(2d-b)(3c-4d)}$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluție dată de autor și de d-l *Cernăuți Iosif* (lic. Timișoara).

Știm că dacă avem câtul a două polinoame:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

unde gradul lui $f(x)$ este cel mult cu două unități mai mic ca al lui $\varphi(x)$ și unde $\varphi(x)$ are rădăcinele simple $a, b, c, \ldots l$, atunci *Euler* a stabilit identitatea:

$$(1)\qquad \sum\frac{f(a)}{\varphi'(a)}=0,$$

$\varphi'(a)$ fiind derivata lui $\varphi(x)$ pentru $x=a$, suma referindu-se la toate rădăcinele numitorului.

Așa fiind, să considerăm fracțiunea:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{x(x+2)}{(x-a)(x-2b)(x-3c)(x-4d)}.$$

Observând că condițiile de mai sus sunt împlinite, numitorul având rădăcinel e simple, a, $2b$, $3c$, $4d$, avem în virtutea identității lui *Euler* (1):

$$\frac{a(a+2)}{(a-2b)(a-3c)(a-4d)}+\frac{2b(2b+2)}{(2b-a)(2b-3c)(2b-4d)}+$$
$$\frac{3c(3c+2)}{(3c-a)(3c-2b)(3c-4d)}+\frac{4d(4d+2)}{(4d-a)(4d-2b)(4c-3d)}=0.$$

Această relație se mai poate scrie evident:

$$\frac{a(a+2)}{(a-2b)(a-3c)(a-4d)}+\frac{2b(b+1)}{(2b-a)(2b-3c)(b-2d)}+$$
$$\frac{3c(3c+2)}{(3c-a)(3c-2b)(3c-4d)}=\frac{2d(4d+2)}{(4d-a)(2d-b)(3c-4d)}$$

care este tocmai identitatea cerută.

Soluție dată de d-l *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București).

Considerăm determinantul evident nul, având două linii proporționale.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2a & 2b & 6c & 4d \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ a & b & 3c & 2d \\ a^2 & 2b^2 & 9c^2 & 8d^2 \end{vmatrix}=0.$$

Adunând la elementele primei linii, elementele ultimei linii, avem:

$$\begin{vmatrix} a(a+2) & 2b(b+1) & 3c(3c+2) & 2d(4d+2) \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ a & b & 3c & 2d \\ a^2 & 2b^2 & 9c^2 & 8d^2 \end{vmatrix}=0.$$

Dezvoltând după elementele primei linii avem:

$$(1)\qquad a(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ b & 3c & 2d \\ 2b^2 & 9c^2 & 8d^2 \end{vmatrix}-$$
$$2b(b+1)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ a & 3c & 2d \\ a^2 & 9c^2 & 8d^2 \end{vmatrix}+3c(3c+2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & b & 2d \\ a^2 & 2b^2 & 8d^2 \end{vmatrix}$$
$$-2d(4d+2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & b & 3c \\ a^2 & 2b^2 & 9c^2 \end{vmatrix}=0.$$

Să desvoltăm determinanții de ordinul al 3-lea, avem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ b & 3c & 2d \\ 2b^2 & 9c^2 & 9d^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2b & 3c-2b & 4d-2b \\ 4b^2 & 9c^2-4b^2 & 16d^2-4b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(3c-2b)(4d-2b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3c+2b & 4d+2b \end{vmatrix} =$$

$$(3c-2b)(2d-b)(4d-3c)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ a & 3c & 2d \\ a^2 & 9c^2 & 8d^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 3c-a & 4d-a \\ a^2 & 9c^2-a^2 & 16d^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (3c-a)(4d-a)(4d-3c)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & b & 2d \\ a^2 & 2b^2 & 8d^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2b-a & 4d-a \\ a^2 & 4b^2-a^2 & 16d^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(2b-a)(4d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2b+a & 4d+a \end{vmatrix} =$$

$$(2b-a)(4d-a)(2d-b).$$

In fine:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & b & 2c \\ a^2 & 2b^2 & 9c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2b-a & 3c-a \\ a^2 & 4b^2-a^2 & 9c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (2b-a)(3c-a)(3c-2b).$$

Atunci (1) devine:

$$a(a+2)(3c-2b)(2d-b)(4d-3c) -$$
$$2b(b+1)(3c-a)(4d-a)(4d-3c) +$$
$$3c(3c+2)(2b-a)(4d-a)(2d-b) =$$
$$2d(4d+2)(2b-a)(3c-a)(3c-2b).$$

Impărțind ambii membri cu produsul:

$$(a-2b)(a-3c)(a-4d)(2b-3c)(b-2d)(3c-4d),$$

și înmulțind cu -1, obținem:

$$\frac{a(a+2)}{(a-2b)(a-3c)(a-4d)} + \frac{2b(b+1)}{(2b-a)(2b-3c)(b-2d)} +$$
$$\frac{3c(3c+2)}{(3c-a)(3c-2b)(3c-4d)} = \frac{2d(4d+2)}{(4d-a)(2d-b)(3c-4d)}$$

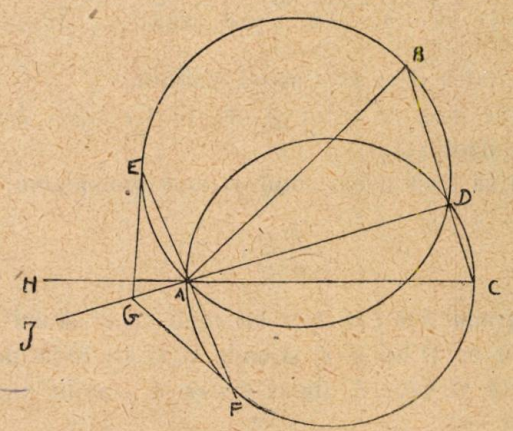
care este identitatea cerută.

Au dat soluții mai lungi, scăpând de numitori în relația dată și făcând toate dezvoltările, verificând astfel identitatea, d-nii: *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Bordeianu Adrian* (lic. Milit., Iași), *Dănciulescu Virgiliu* lic. Buzești, Craiova), *Diaconescu H. Aurel* (lic. Milit., Craiova), *Dnmitrescu I. Eugen* (li . Buzău), *Gârneață Enache* (lic. Milit., Iași), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. Piatra-Neamț), *Haim F. Leon* (lic. P.-Neamț), *Ionescu Gr. Virgil* (lic. Milit., Craiova). *Isăcescu C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), *Mocuță Traian* (lic. Arad), *Nedelcu Lupșan* (Brașov), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iași), *Pârvulescu M. Ștefan* (lic. Milit, Craiova), *Podariu Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Târgoviște), *Popovici M.* (Focșani), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov) și *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

627. — *In triunghiul* ABC, *tangentele la cercurile descrise pe* AB *și* AC *ca diametre, în punctele în care cercurile taie a doua oară bisectoarea exterioară a vârfului* A, *concură pe înălțimea acestui vârf.*

C-TIN TH. IONESCU BUJOR

Observăm că înălțimea unghiului A, este la întretăierea D, a celor două cercuri, unghiurile din D fiind drepte.



Apoi se vede pe figură că:

$\widehat{EAH} = \widehat{EAB}$, prin construcție

$\widehat{EAH} = \widehat{CAF}$ ca opuse la vârf.

Deci:

$$\widehat{EAB} = \widehat{CAF}.$$

Rezultă, că:

$$\text{măs. } \overset{\frown}{EB} = \text{măs. } \overset{\frown}{FC}.$$

deci și:

$$\text{măs. arc } \overset{\frown}{AE} = \text{măs. arc } \overset{\frown}{AF}.$$

Rezultă atunci, că:

$$\overset{\wedge}{GEA} = \overset{\wedge}{GFA},$$

ca având măsuri egale:

Triunghiul EBF este isoscel, atunci:

$$GE = GF,$$

deci G e pe axul radical al celor două cercuri descrise pe AB și AC ca diametre, adică pe AD' Tangentele în E și F la cele două cercuri, concură deci pe înălțimea AD a triunghiului ABC.

Soluții date de d-nii: *Arsene A'exandru* (lic. Milit., Iași), *Călinescu I. Aurelian* (Zimnicea), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iași), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit.. Iași., *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Gheorghe Mihai* (lic) Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Ionescu Gh. Virgiliu* (lic. Milit., Iași), *Kielburger Mihail* (Șc. Polit, Timișoara), *Leibovici R. Emil* (lic. Pitești), *Mocuța Traian* (lic. Arad). *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Popa L. Victor* (lic. Arad), *Popescu Gh. Ovidiu* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popovici M.* (Focșani) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit, Iași),

630. — *Dacă ecuația:*

$$x^3 + px + q = 0$$

are rădăcinele sale reale atunci și ecuația:

$$4x^3 + 3px^2 + 2(q - k^2)x - pk^2 = 0,$$

are toate rădăcinele sale reale, oricare ar fi k real.

V. ALACI

Ecuațiile:

$$x^3 + px + q = 0, \quad x^2 - k^2 = 0$$

au rădăcinele reale, prima prin ipoteză, a 2-a evident, k fiind real.

Urmează că și ecuația:

$$(x^3 + px + q)(x^2 - k^2) = 0,$$

sau:

(1) $$x^4 + px^3 + (q - k^2)x^2 - pk^2x - k^2q = 0,$$

are toate rădăcinile sale reale.

Ecuația (1) având toate rădăcinele sale reale, știm că și derivata sa are toate rădăcinele sale reale, adică:

$$4x^3 + 3px^2 + 2(q - k^2)x - pk^2 = 0,$$

are toate rădăcinele reale, ceiace trebuia dovedit.

Observare. Evident că am putea înlocui ecuația $x^2 + px + q = 0$, printr'o altă ecuație $f(x) = 0$, de un grad oarecare, având toate rădăcinele reale.

Soluții date de d-nii: *Beșchea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Novacu Valeriu* (Arad), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Popescu C. Virgiliu* (Târgoviște), *Popovici M.* (Focșani), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Șc. Polit. Leoben, Austria).

631. — *Să se verifice identitatea:*

$$\sum a \sin\frac{A}{2} \sin^3\frac{B-C}{2} = p \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B-C}{2} \sin\frac{C-A}{2}$$

NICOLAE I. MANOLESCU

Soluție dată de d-l *Cernăuți Iosef* (lic. Timișoara).

Dacă în identitatea:

$$\sum a(b-c)^3 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c),$$

facem:

$$a = \sin A - \sin B - \sin C = -4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$b = \sin B - \sin C - \sin A = -4\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$c = \sin C - \sin A - \sin B = -4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

avem:

$$\sum -4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \cdot 4^3 \sin^3\frac{A}{2}\sin^3\frac{B-C}{2} =$$

$$-4^4 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\times \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Simplificând ambii membrii cu:

$$-4^4 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

avem:

$$(1)\qquad \sum \sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin^3\frac{B-C}{2}=$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2},$$

Dar:

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{2}=\frac{a}{4R},$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R},$$

și aiunci (1) devine:

$$\sum\frac{a}{4R}\sin\frac{A}{2}\sin^3\frac{B-C}{2}=$$

$$\frac{p}{4R}\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$$

sau:

$$\sum a\sin\frac{A}{2}\sin^3\frac{B-C}{2}=$$

$$p\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$$

Alte soluții date de d-nii: *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Gloareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic, Milit., Craiova) și *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București).

PROBLEME PROPUSE

666. — Să se găsiască numerile divizibile cu 44, care împărțite prin 38 să dea restul 2 și împărțite prin 17 să dea restul 11.

TRAIAN T. MARINEANU

667. — Să se găsiască numerile ale căror patrate perfecte se termină cu 444441.

GH CONSTANTINESCU

668. — Fie O_1, O_2, două cercuri ortogonale, un al treilea cerc O_3 este tangent celor două cercuri și tangentei comune. Considerăm apoi cercul O_4 tangent lui O_1 și tangentelor comune lui O_1 și O_2 și cercul O_5 tangent lui O_2 și tangentelor comune lui O_1 și O_2.

Să se calculeze raza cercului O_3 în funcție de razele cercurilor O_4, O_5 și de unghiul tangentelor comune lui O_1, O_2.

C-TIN V. COSTACHESCU

669. — Se dă un cerc de diametru $AB=a$. Se duce o coardă PQ paralelă la AB și egală cu latura patratului înscris în cerc. Fie E, F simetricele lui P, Q în raport cu AB; coardele AE și BF se taie în K, iar AF și BE în M.

Să se demonstreze că:

1°. Patrulaterul $FKEM$ este inscriptibil și să se calculeze unghiul AMB.

2°. $BE=\frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $BF=\frac{a}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

ȘTEFAN ST. STEBLEA

670. — Să se descompună în factori lineari, expresiunea:

$$\sum(x^2+1)(y-z)(1-x).$$

CEZAR COSNITA

671. — Fiind date ecuațiile:

$$x^3+ax^2+a^2x+a^3=0$$

$$x^3+ax^2+2a^2x+3a^3=0,$$

să se arate că ele nu pot avea două rădăcini comune.

Generalizare.

GHEORGHE. TH. GHEORGHIU

672. — Să se stabilească identitățile:

$$3^{3n}-3^{3n-1}C_{6n}^2+3^{3n-2}C_{6n}^4-\ldots\pm C_{6n}^{6n}=(-1)^n2^{6n}$$

$$3^{3n-1}C_{6n}^1-3^{3n-2}C_{6n}^3+3^{3n-3}C_{6n}^5-\ldots\pm C_{6n}^{6n-1}=0.$$

NICOLAE G. BESCHEA

672. — Să se stabilească identitatea:

$$\cos t+\cos 5t+\cos 9t=2^8\prod_{k=0}^{4}\left[\cos t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{10}\right]\prod_{k=1}^{2}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{6}\right)\left[\cos t-\cos\frac{(k+3)\pi}{6}\right]$$

V. ALACI

INFORMAȚIUNI

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

— —

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

— —

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe oi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMIȘOARA.

ANUL VII. 15 NOEMBRIE 1927 NO. 9

REVISTA MATEMATICĂ

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI. SUME TRIGONOMETRICE TRANSFORMATE IN PRODUSE.
2. NOTE MATEMATICE, 18, 19.
3. CONCURSUL R. M. T.
4. CHESTIUNI DE EXAMEN.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 640, 641, 642, 643, 645.
7. PROBLEME PROPUSE.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
„Institut de Arte Grafice Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că începând cu anul acesta face parte din comitetul de redacție al Revistei Matematice din Timișoara și d-nul:

Cristea Niculescu, inginer-șef. Director general al Soc. anon. industriale Arad-Brad.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-șef C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Adminstrația Revistei, și se poate procura în shimibul prețului:

Anul I, epuizat
Anul II, broșat, 100 lei
Anul III, broșat, 100 lei
Anul IV, broșat, 100 lei
Anul V, broșat, 100 lei.
Anul VI, broșat, 100 lei.

ANUL VII — NO. 9. TIMISOARA, 15 NOEMBRIE 1927

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

SUME TRIGONOMETRICE TRANSFORMATE IN PRODUSE

de V. ALACI

Vom expune o metodă care să ne permită a exprima prin produse, anumite sume trigonometrice.

Astfel, fie sumele:

$$(1)\quad \begin{aligned} S_1 &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos at + a_2 \cos bt + \ldots + a_n \cos lt \\ S_2 &= b_1 \sin at + b_2 \sin bt + \ldots + b_n \sin lt, \end{aligned}$$

unde $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$; $b_1, b_2, \ldots b_n$ sunt niște numere oarecare, iar $a, b, \ldots k$, l sunt numere întregi pozitive în progresie aritmetică, cu rația r.

Să efectuăm transformarea:

$$(2)\qquad e^{it} = x, \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

de unde deducem folosind formulele lui *Euler*:

$$(3)\quad \begin{aligned} \cos at &= \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} = \frac{1}{2}\left(x^a + \frac{1}{x^a}\right) \\ \sin at &= \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(x^a - \frac{1}{x^a}\right) \end{aligned}$$

In virtutea acestor relații, sumele (1) se pot scri:

$$2S_1 = a_0 + a_1\left(x^a + \frac{1}{x^a}\right) + a_2\left(x^b + \frac{1}{x^b}\right) + \ldots$$

$$\ldots + a_n\left(x^l + \frac{1}{x^l}\right)$$

$$2iS_2 = b_1\left(x^a - \frac{1}{x^a}\right) + b_2\left(x^b - \frac{1}{x^b}\right) + \ldots + b_n\left(x^l - \frac{1}{x^l}\right)$$

sau încă:

$$2S_1 = \frac{1}{x^l}(a_n x^{2l} + a_{n-1} x^{l+k} + \ldots + a_1 x^{l+a} +$$

$$a_0 x^l + a_1 x^{l-a} + \ldots + a_{n-1} x^{l-k} + a_n)$$

$$(4)\quad 2iS_2 = \frac{1}{x^l}(b_n x^{2l} + b_{n-1} x^{l+k} + \ldots + b_1 x^{l+a} -$$

$$b_1 x^{l-a} - \ldots - b_{n-1} x^{l-k} - b_n).$$

Luăm acum polinoamele din membrul al 2-lea și le egalăm cu zero, obținem niște ecuațiuni reciproce de gradul $2l$, anume:

$$a_n x^{2l} + a_{n-1} x^{l+k} + \ldots + a_1 x^{l+a} + a_0 x^l +$$

$$a_1 x^{l-a} + \ldots + a_{n-1} x^{l-k} + a_n = 0$$

$$(5)\quad b_n x^{2l} + b_{n-1} x^{l+k} + \ldots + b_1 x^{l+a} - b_1 x^{l-a} - \ldots$$

$$\ldots - b_{n-1} x^{l-k} - b_n = 0.$$

Dacă însemnăm cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_l$, l rădăcini a primei ecuații, și $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots \frac{1}{\alpha_l}$ sunt rădăcini ale ei, ecuația fiind reciprocă.

A doua ecuație are evident rădăcinele $1, -1$, apoi rădăcini de forma, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{l-1}$, $\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots$ $\frac{1}{\beta_{l-1}}$, fiind reciprocă.

Cunoscând rădăcinele polinoamelor din (4), ele se pot descompune în factori și putem scri:

$$2S_1 = \frac{a_n}{x^l}(x - \alpha_1)\left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)(x - \alpha_2)\left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right)\ldots$$

$$(x - \alpha_l)\left(x - \frac{1}{\alpha_l}\right)$$

$$2iS_2 = \frac{b_n}{x^l}(x-1)(x+1)(x-\beta_1)\left(x - \frac{1}{\beta_1}\right)\cdots$$

$$(x - \beta_{l-1})\left(x - \frac{1}{\beta_{l-1}}\right),$$

sau încă:

$$2\,S_1 = \frac{a_n}{x^l}\left[x^2 - \left(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1}\right)x + 1\right]\left[x^2 - \left(\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2}\right)x + 1\right]\cdots\left[x^2 - \left(\alpha_l + \frac{1}{\alpha_l}\right)x + 1\right]$$

$$2\,i\,S_2 = \frac{b_n}{x^l}(x^2 - 1)\left[x^2 - \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right)x + 1\right]\cdots\left[x^2 - \left(\beta_{l-1} + \frac{1}{\beta_{l-1}}\right)x + 1\right].$$

Putem scrie mai concentrat astfel:

$$S_1 = 2^{l-1}\,a_n \prod_{k=1}^{l}\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k}\right)\right]$$

$$S_2 = 2^{l-1}\,b_n\left[\frac{1}{2i}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]\prod_{k=1}^{l-1}\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\beta_k + \frac{1}{\beta_k}\right)\right].$$

Folosind relațiile (3) în sens invers, putem scri încă:

$$(6)\qquad S_1 = 2^{l-1}\,a_n \prod_{k=1}^{l}\left[\cos t - \frac{1}{2}\left(\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k}\right)\right]$$

$$S_2 = 2^{l-1}\,b_n \sin t \prod_{k=1}^{l-1}\left[\cos t - \frac{1}{2}\left(\beta_k + \frac{1}{\beta_k}\right)\right]$$

Acestea sunt formulele importante, care transformă în produse, sumele trigonometrice S_1 și S_2.

Aplicații

1°. *Să se descompună în factori, sumele:*

$$S_1 = \cos nt, \quad S_2 = \sin nt.$$

In acest caz, vom lua în (1):

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0, \quad a_n = 1$$

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0, \quad b_n = 1,$$

iar progresia aritmetică $a, b, \ldots l$ de n termeni, are:

$$a = 1, \quad r = 1, \quad \text{deci} \quad l = n.$$

Ecuațiile (5) devin:

$$x^{2n} + 1 = 0, \quad x^{2n} - 1 = 0,$$

cu rădăcinele respectiv:

$$\alpha_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$\beta_k = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}.$$

Observând că:

$$\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} + \frac{1}{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

$$\beta_k + \frac{1}{\beta_k} = 2\cos\frac{k\pi}{n},$$

formulele de transformare (6) devin:

$$(7)\qquad \cos nt = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[\cos t - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]$$

$$\sin nt = 2^{n-1}\sin t\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos t - \cos\frac{k\pi}{n}\right).$$

2°. *Să se descompună în factori, sumele:*

$$S_1 = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt$$

$$S_2 = \sin t + \sin 2t + \ldots + \sin nt.$$

In acest caz vom lua în (1):

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 1$$

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1,$$

iar progresia aritmetică $a, b, \ldots l$ de n termeni, are:

$$a = 1, \quad r = 1.$$

Ecuațiile (5) devin:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x^n + \ldots + x + 1 = 0 \\ &x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x^{n+1} - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Prima ecuație se poate scrie:

$$\frac{x^{2n+1} - 1}{x - 1} = 0,$$

cu rădăcinele:

$$\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}, \quad (k = 1, 2, \ldots 2n).$$

Observând că:

$$\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k} = 2\cos\frac{2k\pi}{2n+1},$$

prima din formulele (6) devine:

$$(9)\quad \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\cos t - \cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right).$$

A doua ecuație din (8) se poate scrie:

$$(x^{n+1}-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)=0,$$

sau:

$$(10)\quad \frac{(x^{n+1}-1)(x^n-1)}{x-1}=0.$$

Acum vom face două ipoteze:

a. Dacă $n=2p$, rădăcinele ecuației (10), sunt:

$$\beta_k = \cos\frac{2k\pi}{2p+1} + i\sin\frac{2k\pi}{2p+1},\quad (k=1,\ 2,\ldots 2p)$$

$$\beta_{k_1} = \cos\frac{k_1\pi}{p} + i\sin\frac{k_1\pi}{p},\quad (k_1=0,\ 1,\ 2,\ldots 2p-1).$$

Observând că:

$$\beta_k + \frac{1}{\beta_k} = 2\cos\frac{2k\pi}{2p+1},\quad \beta_{k_1} + \frac{1}{\beta_{k_1}} = 2\cos\frac{k_1\pi}{p},$$

a doua din formulele (6) devine:

$$\sin t + \sin 2t + \ldots + \sin 2pt = 2^{2p-1}\sin t\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t - \cos\frac{2k\pi}{2p+1}\right)\prod_{k_1=1}^{p-1}\left(\cos t - \cos\frac{k_1\pi}{p}\right)$$

sau ținând seamă de a doua din formulele (7), putem scri:

$$(11)\quad \sin t + \sin 2t + \ldots + \sin 2pt = 2^p\sin pt\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t - \cos\frac{2k\pi}{2p+1}\right).$$

b. Dacă $n=2p+1$, rădăcinele ecuației (10) sunt:

$$\beta_k = \cos\frac{k\pi}{p+1} + i\sin\frac{k\pi}{p+1},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2p+1).$$

$$\beta_{k_1} = \cos\frac{2k_1\pi}{2p+1} + i\sin\frac{2k_1\pi}{2p+1},\quad (k_1=1,\ 2,\ldots 2p).$$

Observând că:

$$\beta_k + \frac{1}{\beta_k} = 2\cos\frac{k\pi}{p+1},\quad \beta_{k_1} + \frac{1}{\beta_{k_1}} = 2\cos\frac{2k_1\pi}{2p+1},$$

a doua din formulele (6) devine:

$$\sin t + \sin 2t + \ldots + \sin(2p+1)t = 2^{2p}\sin t\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t - \cos\frac{k\pi}{p+1}\right)\left(\cos t - \cos\frac{2k\pi}{2p+1}\right)$$

sau ținând seamă de a doua din formulele (7), putem scri:

$$(12)\quad \sin t + \sin 2t + \ldots + \sin(2p+1)t = 2^p\sin(p+1)t\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t - \cos\frac{2k\pi}{2p+1}\right).$$

3. *Să se descompună în factori, sumele:*

$$S_1 = \frac{1}{2} - \cos t + \cos 2t + \ldots + (-1)^n\cos nt$$

$$S_2 = \sin t - \sin 2t + \ldots + (-1)^{n-1}\sin nt.$$

In acest caz vom lua în (1):

$$a_p = (-1)^p,\quad (p=0,\ 1,\ 2,\ldots n),$$

$$b_q = (-1)^{q-1},\quad (q=1,\ 2,\ldots n),$$

iar progresia aritmetică, $a, b, \ldots l$ de n termeni, are:

$$a=1,\quad r=1.$$

Ecuațiile (5) devin:

$$(13)\quad \begin{aligned} &x^{2n} - x^{2n-1} + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots - x + 1 = 0\\ &x^{2n} - x^{2n-1} + \ldots + (-1)^{n+1}x^{n+1} + \\ &(-1)^n x^{n-1} + \ldots + x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Prima ecuație se poate scri:

$$\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}=0,$$

cu rădăcinele:

$$\alpha_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n+1},$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1,\ n+1,\ n+2,\ldots 2n).$$

Observând că:

$$\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k} = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1},$$

prima din formulele (6) devine:

$$(14)\quad \frac{1}{2} - \cos t + \cos 2t - \ldots + (-1)^n\cos nt = (-1)^n 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[\cos t - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right].$$

Acum să trecem la ecuația 2-a din (13). Vom face două ipoteze:

a. Dacă $n=2p$, a doua ecuație din (13), devine:

$$(x^{2p+1}+1)(x^{2p-1}-x^{2p-2}+\ldots+x-1)=0,$$

sau:

$$\frac{(x^{2p+1}+1)(x^{2p}-1)}{x+1}=0,$$

cu rădăcinele:

$$\beta_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p+1},$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots p-1,\ p+1,\ldots 2p)$$

$$\beta_{k_1}=\cos\frac{k_1\pi}{p}+i\sin\frac{k_1\pi}{p},\quad (k_1=0,1,2,\ldots 2p-1)$$

Observând că:

$$\beta_k+\frac{1}{\beta_k}=2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1},\quad \beta_{k_1}+\frac{1}{\beta_{k_1}}=2\cos\frac{k_1\pi}{p},$$

a doua din formulele (6) devine:

$$\sin t-\sin 2t+\ldots-\sin 2pt=-2^{2p-1}\sin t\prod_{k=0}^{p-1}\left[\cos t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1}\right]\prod_{k_1=0}^{p-1}\left(\cos t-\cos\frac{k_1\pi}{p}\right),$$

sau ținând seamă de a doua din formulele (7), putem scri încă:

$$(15)\quad \sin t-\sin 2t+\ldots-\sin 2pt=$$
$$-2^p\sin pt\prod_{k=0}^{p-1}\left[\cos t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1}\right].$$

b. Dacă, $n=2p+1$, a doua ecuație din (13) devine:

$$(x^{2p+2}-1)(x^{2p}-x^{2p-1}+\ldots-x+1)=0,$$

sau:

$$\frac{(x^{2p+2}-1)(x^{2p+1}+1)}{x+1}=0,$$

cu rădăcinele:

$$\beta_k=\cos\frac{k\pi}{p+1}+i\sin\frac{k\pi}{p+1},\ (k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2p+1)$$

$$\beta_{k_1}=\cos\frac{(2k_1+1)\pi}{2p+1}+i\sin\frac{(2k_1+1)\pi}{2p+1},$$
$$(k_1=0,\ 1,\ 2,\ldots p-1,\ p+1,\ p+2,\ldots 2p)$$

Observând că:

$$\beta_k+\frac{1}{\beta_k}=2\cos\frac{k\pi}{p+1},\quad \beta_{k_1}+\frac{1}{\beta_{k_1}}=2\cos\frac{(2k_1+1)\pi}{2p+1}$$

a doua din formulele (6) devine:

$$\sin t-\sin 2t+\ldots+\sin(2p+1)t=2^{2k}\sin t\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{p\pi}{p+1}\right)\prod_{k_1=0}^{p-1}\left[\cos t-\cos\frac{(2k_1+1)\pi}{2p+1}\right],$$

sau ținând seamă de a doua din formulele (7), putem scri încă:

$$(16)\quad \sin t-\sin 2t+\ldots+\sin(2p+1)t=$$
$$2^p\sin(p+1)t\prod_{k=0}^{p-1}\left[\cos t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1}\right].$$

4°. *Să se descompună în factori, sumele:*

$$S_1=\cos t+\cos 3t+\cos 5t+\ldots+\cos(2p+1)t$$
$$S_2=\sin t+\sin 3t+\sin 5t+\ldots+\sin(2p+1)t.$$

In acest caz, vom lua în (1):

$$n=2p+1,\quad a_0=a_2=\ldots=a_{2p}=0,$$
$$a_1=a_3=\ldots=a_{2p+1}=1$$

$$b_2=b_4=\ldots=b_{2p}=0,\quad b_1=b_3=\ldots=b_{2p+1}=1,$$

iar progresia aritmetică $a, b, \ldots l$ de n termeni, are:

$$a=1,\quad r=1.$$

Ecuațiile (5) devin:

$$(17)\quad \begin{aligned} &x^{4p+2}+x^{4p}+\ldots+x^{2p}+\ldots+x^2+1=0\\ &x^{4p+2}+x^{4p}+\ldots+x^{2p+2}-x^{2p}-\\ &\quad x^{2p-2}-\ldots-x^2-1=0.\end{aligned}$$

Prima ecuație se poate scri:

$$\frac{x^{4p+4}-1}{x^2-1}=0,$$

cu rădăcinele:

$$\alpha_k=\cos\frac{k\pi}{2p+2}+i\sin\frac{k\pi}{2p+2},$$
$$(k=1,2,\ldots 2p+1,\ 2p+3,\ 2p+4,\ldots 4p+3)$$

Observând că:

$$\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k} = 2\cos\frac{k\pi}{2p+2},$$

prima din formulele (6), devine:

(18) $$\cos t + \cos 3t + \cos 5t + \ldots + \cos(2p+1)t = 2^{2p}\prod_{k=1}^{2p+1}\left(\cos t - \cos\frac{k\pi}{2p+2}\right).$$

A doua ecuație din (17) se poate scri:

$$(x^{2p+2}-1)(x^{2p}+x^{2p-2}+\ldots+x^2+1)=0,$$

sau:

$$\frac{(x^{2p+2}-1)^2}{x^2-1}=0.$$

cu rădăcinele:

$$\beta_k = \cos\frac{k\pi}{p+1} + i\sin\frac{k\pi}{p+1},$$

$$(k=1, 2, \ldots p, p+2, p+3, \ldots 2p+1)$$

$$\beta_k = \cos\frac{k\pi}{p+1} + i\sin\frac{k_1\pi}{p+1}, \quad (k_1=0, 1, 2, \ldots 2p+1)$$

Observând că:

$$\beta_k + \frac{1}{\beta_k} = 2\cos\frac{k\pi}{p+1}, \quad \beta_{k_1} + \frac{1}{\beta_{k_1}} = 2\cos\frac{k_1\pi}{p+1},$$

a doua din formulele (6) devine:

(19) $$\sin t + \sin 3t + \ldots + \sin(2p+1)t = 2^{2p}\sin t\prod_{p=1}^{p}\left(\cos t - \cos\frac{k\pi}{p-1}\right)^2.$$

5°. *Să se descompună în factori, sumele:*

$$S_1 = \cos t - \cos 3t + \cos 5t - \ldots + (-1)^p\cos(2p+1)t$$

$$S_2 = \sin t - \sin 3t + \sin 5t - \ldots + (-1)^p\sin(2p+1)t.$$

In acest caz vom lua în (1):

$$n=2p+1, \quad a_0=a_2=\ldots=a_{2p}=0, \quad a_{2p+1}=(-1)^p,$$
$$(p=0, 1, 2, \ldots p),$$

$$b_2=b_4=\ldots=b_{2p}=0, \quad b_{2p+1}=(-1)^p,$$
$$(p=0, 1, 2, \ldots p),$$

iar progresia aritmetică, $a, b, \ldots l$ de n termeni, are:

$$a=1, \quad r=1.$$

Ecuațiile (5) devin:

$$x^{4p+2} - x^{4p} + x^{4p-2} - \ldots + (-1)^p x^{2p+2} + (-1)^p x^{2p} + (-1)^{p+1}x^{2p-2} + \ldots + (-1)^{2p-1}x^2 + (-1)^{2p} = 0$$

(20) $$x^{4p+2} - x^{4p} + \ldots + x^2 - 1 = 0.$$

Prima ecuație se poate scrie:

$$[x^{2p+2} + (-1)^p][x^{2p} - x^{2p-2} + \ldots \ldots + (-1)^{p-1}x^2 + (-1)^p] = 0,$$

sau:

(21) $$\frac{[x^{2p+2} + (-1)^p]^2}{x^2+1} = 0.$$

Vom face două ipoteze:

Dacă $p=2q$, ecuația (21) devine:

$$\frac{(x^{4q+2}+1)^2}{x^2+1}=0,$$

având pentru numărător rădăcinele duble:

$$\alpha_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{4q+2} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{4q+2},$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots 4q+1),$$

Observând că:

$$\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k} = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{4q+2},$$

prima din formulele (6) devine, ținând seamă și de faptul că numitorul x^2+1 divizat cu $2x$, se transformă în $\cos t$:

(22) $$\cos t - \cos 3t + \cos 5t - \ldots + \cos(4q+1)t = \frac{16^q}{\cos t}\prod_{k=0}^{2q}\left[\cos t - \cos\frac{(2k+1)\pi}{4q+2}\right]^2.$$

Dacă, $p=2q+1$, atunci ecuația (21), devine:

(23) $$\frac{(x^{4q+4}+1)^2}{x^2+1}=0,$$

având pentru numărător, rădăcinele duble:

$$\alpha_k = \cos\frac{k\pi}{2q+2} + i\sin\frac{k\pi}{2q+2}, \quad (k=0, 1, 2, \ldots 4q+3)$$

Observând că:

$$\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k} = 2\cos\frac{k\pi}{2q+2},$$

exceptând pentru $k=0$ și $k=2q+2$, când $\alpha_0=1$, $\alpha_{2q+2}=-1$, ceiace face ca numărătorul ecuației

(23) să aibă factorul $(x^2-1)^2$, prima din formulele (6) devine ținând seamă că factorul:

$$\frac{(x^2-1)^2}{x^2+1},$$

se transformă, împărțind numărătorul cu $-4x^2$, și numitorul cu $2x$, în:

$$\frac{\sin^2 t}{\cos t}:$$

$$(24)\quad \cos t-\cos 3t+\cos 5t-\ldots-\cos(4q+3)t=$$

$$=\frac{2^{4q+2}\sin^2 t}{\cos t}\prod_{k=1}^{2q+1}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{2q+2}\right)^2.$$

A doua ecuație din (20) se poate scri:

$$\frac{x^{4p+4}-1}{x^2+1}=0,$$

având pentru numărător rădăcinele:

$$\beta_k=\cos\frac{k\pi}{2p+2}+i\sin\frac{k\pi}{2p+2},\quad (k=0,1,2,\ldots 4p+3)$$

Observând că:

$$\beta_k+\frac{1}{\beta_k}=2\cos\frac{k\pi}{2p+2},$$

a doua din formulele (6) devine, ținând seama și de faptul că numitorul x^2+1 divizat cu $2x$ se transformă în $\cos t$:

$$(25)\quad \sin t-\sin 3t+\sin 5t-\ldots+(-1)^p\sin(2p+1)t$$

$$=(-1)^p 2^{2p}\operatorname{tg} t\prod_{k=1}^{2p+1}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{2p+2}\right).$$

6°. *Să se descompună în factori, sumele:*

$$S_1=\frac{n+1}{2}+n\cos t+(n-1)\cos 2t+\ldots$$

$$\ldots+2\cos(n-1)t+\cos nt$$

$$S_2=\frac{n+1}{2}-n\cos t+(n-1)\cos 2t+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\cos nt.$$

In acest caz, vom lua în (1):

$$a_p=n+1-p,\quad (p=0,\ 1,\ 2,\ldots n)$$

pentru a avea pe S_1, și:

$$a_p=(-1)^p(n+1-p),\quad (p=0,\ 1,\ 2,\ldots n),$$

pentru a avea pe S_2, în ambele cazuri progresia aritmetică $a,\ b,\ldots l$ de n termeni, are:

$$a=1,\quad r=1.$$

Ecuațiile corespunzătoare (5) devin:

$$x^{2n}+2x^{n-1}+\ldots+nx^{n+1}+(n+1)x^n+$$

$$nx^{n-1}+\ldots+2x+1=0$$

$$x^{2n}-2x^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}nx^{n+1}+$$

$$(-1)^n(n+1)x^n+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\ldots-2x+1=0.$$

Aceste ecuații se mai pot scri:

$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2=0$$

$$[1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n]^2=0,$$

sau încă:

$$(26)\quad \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)^2=0$$

$$\left[\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}-1}{x+1}\right]^2=0.$$

Prima din aceste ecuații, are ca rădăcini duble:

$$\alpha_k=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1},\quad (k=1,2,\ldots n).$$

Observând că:

$$\alpha_k+\frac{1}{\alpha_k}=2\cos\frac{2k\pi}{n+1},$$

prima din formulele (6), devine dacă $n=2p$:

$$(27)\quad \frac{2p+1}{2}+2p\cos t+(2p-1)\cos 2t+\ldots$$

$$\ldots+2\cos(2p-1)t+\cos 2pt=$$

$$2^{2p-1}\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{2p+1}\right)^2,$$

iar dacă $n=2p+1$, avem:

$$(28)\quad (p+1)+(2p+1)\cos t+2p\cos 2t+\ldots$$

$$\ldots+2\cos 2pt+\cos(2p+1)t=$$

$$2^{2p}(1+\cos t)\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{p+1}\right)^2.$$

Să luăm a doua ecuație din (26).
Dacă, $n=2p$, ea devine:

$$\left(\frac{x^{2p+1}+1}{x+1}\right)^2=0,$$

cu rădăcinele duble:

$$\alpha_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p+1},$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots p-1,\ p+1,\ p+2,\ldots 2p).$$

Cum:

$$\alpha_k+\frac{1}{\alpha_k}=2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1},$$

prima din formulele (6), devine:

$$(29)\quad \frac{2p+1}{2}-2p\cos t+(2p-1)\cos 2t+\ldots$$

$$\ldots+\cos 2pt=2^{2p-1}\prod_{k=0}^{p-1}\left[\cos t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1}\right]^2$$

Dacă $n=2p+1$, a 2-a din ecuațiile (26), devine:

$$\left(\frac{x^{2p+2}-1}{x+1}\right)^2=0,$$

cu rădăcinele duble:

$$\alpha_k=\cos\frac{k\pi}{p+1}+i\sin\frac{k\pi}{p+1},$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots p,\ p+2,\ p+3,\ldots 2p+1).$$

Cum:

$$\alpha_k+\frac{1}{\alpha_k}=2\cos\frac{k\pi}{p+1},$$

prima din formulele (6), devine:

$$(30)\quad (p+1)-(2p+1)\cos t+2p\cos 2t-\ldots$$

$$\ldots-\cos(2p+1)t=$$

$$2^{2p}(1-\cos t)\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{p+1}\right)^2.$$

Observare. Formulele (28) și (30) se pot scri mai simplu, folosind a 2-a din formulele (7), anume:

$$(31)\quad (p+1)+(2p+1)\cos t+2p\cos 2t+\ldots$$

$$\ldots+2\cos 2pt+\cos(2p+1)t=(1+\cos t)\frac{\sin^2(p+1)t}{\sin^2 t}$$

$$(32)\quad (p+1)-(2p+1)\cos t+2p\cos 2t-\ldots$$

$$\ldots+2\cos 2pt-\cos(2p+1)t=(1-\cos t)\frac{\sin^2(p+1)t}{\sin^2 t}$$

formule care prin adunare și scădere, ne dau altele, anume:

$$(33)\quad (p+1)+2p\cos 2t+(2p-2)\cos 4t+\ldots+2\cos 2pt$$

$$=\frac{\sin^2(p+1)t}{\sin^2 t}=2^{2p}\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{p+1}\right)^2$$

$$(34)\quad (2p+1)\cos t+(2p-1)\cos 3t+\ldots$$

$$\ldots+3\cos(2p-1)t+\cos(2p+1)t=\frac{\sin^2(p+1)t\cos t}{\sin^2 t}$$

$$=2^{2p}\cos t\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{p+1}\right)^2.$$

7°. *Să se descompună în factori sumele:*

$$\cos^2 t+\cos^2 2t+\ldots+\cos^2 nt-\frac{2n-1}{4}$$

$$\sin^2 t+\sin^2 2t+\ldots+\sin^2 nt-\frac{2n+1}{4}.$$

Luăm relația stabilită (9), în care înlocuim pe t prin $2t$, avem:

$$\frac{1}{2}+\cos 2t+\cos 4t+\ldots+\cos 2nt=$$

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\cos 2t-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right).$$

Dacă aci folosim relațiile:

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$$

avem:

$$\frac{1}{2}-n+2(\cos^2 t+\cos^2 2t+\ldots+\cos^2 nt)=$$

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left[2\cos^2 t-\left(1+\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}+n-2(\sin^2 t+\sin^2 2t+\ldots+\sin^2 nt)=$$

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left[2\cos^2 t-\left(1+\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right]$$

sau:

$$(35)\quad \cos^2 t+\cos^2 2t+\ldots+\cos^2 nt-\frac{2n-1}{4}=$$

$$4^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\cos^2 t-\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

(36) $\sin^2 t + \sin^2 2t + \ldots + \sin^2 nt - \frac{2n+1}{4} =$

$$- 4^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left(\cos^2 t - \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

8°. *Să se descompună în factori sumele:*

$$\sin t \sin 2t + \sin 2t \sin 3t + \ldots$$

$$\ldots + \sin nt \sin (n+1)t - \frac{n+1}{2} \cos t$$

$$\cos t \cos 2t + \cos 2t \cos 3t + \ldots,$$

$$\ldots + \cos nt \cos (n+1)t - \frac{n-1}{2} \cos t.$$

Folosind relaţiile cunoscute:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)],$$

putem scri:

$$\sin t \sin 2t + \sin 2t \sin 3t + \ldots + \sin nt \sin(n+1)t - \frac{n+1}{2} \cos t = \frac{1}{2}[\cos t - \cos 3t + \cos t - \cos 5t + \ldots$$

$$\ldots + \cos t - \cos(2n+1)t] - \frac{n+1}{2} \cos t =$$

$$-\frac{1}{2}[\cos t + \cos 3t + \ldots + \cos(2n+1)t],$$

$$\cos t \cos 2t + \cos 2t \cos 3t + \ldots + \cos nt \cos(n+1)t - \frac{n-1}{2} \cos t = \frac{1}{2}[\cos 3t + \cos t + \cos 5t + \ldots$$

$$\ldots + \cos(2n+1)t + \cos t] - \frac{n-1}{2} \cos t =$$

$$\frac{1}{2}[\cos t + \cos 3t + \ldots + \cos(2n+1)t].$$

In virtutea relaţiilor stabilite (18), aceste relaţiuni devin:

(37) $\sin t \sin 2t + \sin 2t \sin 3t + \ldots + \sin nt \sin(n+1)t - \frac{n+1}{2} \cos t = -2^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n+1} \left(\cos t - \cos \frac{kn}{2n+2}\right)$

(38) $\cos t \cos 2t + \cos 2t \cos 3t + \ldots$

$$\ldots + \cos nt \cos(n+1)t - \frac{n-1}{2} \cos t =$$

$$2^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n+1} \left(\cos t - \cos \frac{k\pi}{2n+2}\right).$$

Aplicaţiile tratate, sunt suficiente pentru a învedera o metodă simplă şi uniformă, care permite a transforma anumite sume trigonometrice, în produse.

Cu alt prilej vom trata problema inversă, deasemenea vom arăta cum relaţiile stabilite şi altele analoage pot servi ca un izvor pentru obţinerea unor importante identităţi trigonometrice.

NOTE MATEMATICE

18. Vom expune o metodă elementară cunoscută, — dar nu la îndemâna corespondenţilor noştri —, pentru a stabili formulele lui *Euler:*

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Pentru aceasta consider funcţiunea:

(1) $$y = \mathrm{L}(\cos x + i \sin x).$$

Derivând, avem:

$$y' = \frac{-\sin x + i \cos x}{\cos x + i \sin x} = \frac{i(\cos x + i \sin x)}{\cos x + i \sin x} = i.$$

Funcţiunea a cărei derivată este i, este evident:

(2) $$y = ix + \mathrm{C} \qquad (\mathrm{C} \text{ o constantă}).$$

Din (1) şi (2) deducem:

$$\mathrm{L}(\cos + i \sin x) = ix + \mathrm{C}.$$

Să determinăm constanta C. Pentru $x = 0$, deducem:

$$\mathrm{C} = 0,$$

deci:

(3) $$\mathrm{L}(\cos x + i \sin x) = ix.$$

Trecând dela logaritm la număr, avem:

(4) $$\cos x + i \sin x = e^{ix}.$$

Schimbând i cu $-i$, avem şi relaţia:

(5) $$\cos x - i \sin x = e^{-ix}.$$

Din relaţiile (4) şi (5) deducem prin adunare şi scădere:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Avem astfel formulele lui *Euler.*

Motivul pentru care am stabilit aceste formule, este articolul din prezentul număr, unde ele se folosesc.

V. A,

19. *Asupra problemei 554.*

Remarcăm că seria $\sum_0^\infty \frac{1}{36n^2+48n+7}$, care face obiectul problemei 554 o mai putem scrie:

$$(1)\qquad \sum_0^\infty \frac{1}{[6n+1][6(n+1)+1]}$$

In cele ce urmează voiu căuta să generalizez chestiunea şi în consecinţă voiu însuma seria:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{[pn+r][p(n+1)+r]\dots[p(n+q)+r]}.$$

Dacă însemnăm cu u_n termenul general, se deduce imediat:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{pn+r}{p(n+q+1)+r}$$

sau:

$$[p(n+q+1)+r]\,u_{n+1}=[pn+r]\,u_n$$

$$\therefore\quad u_{n+1}[pq+(n+1)p+r]=[pn+r]\,u_n$$

Dând lui n valorile 0, 1, 2, ... $(n-1)$, n se obţine:

$$pqu_1+pu_1+ru_1=ru_0$$

$$pqu_2+pu_2+ru_2=pu_1+ru_1$$

$$pqu_3+pu_3+ru_3=pu_2+ru_2$$

. . . . . .

. . . . . .

$$pqu_n+npu_n+ru_n=(n-1)pu_{n-1}+ru_{n-1}$$

$$pqu_{n+1}+(n+1)pu_{n+1}+ru_{n+1}=npu_n+ru_n.$$

Adunând toate aceste egalităţi membru cu membru şi făcând reducerile avem:

$$pq\sum_1^{n+1}u_n+u_{n+1}[(n+1)p+r]=ru_0.$$

Trecând la limită pentru $n=\infty$, termenul $u_{n+1}[(n+1)p+r]$ tinde către 0, atunci putem scri:

$$pq\sum_1^\infty u_n=ru_0.$$

Adunând în ambii membri pqu_0 avem:

$$pq\sum_0^\infty u_n=u_0(pq+r)$$

de unde:

$$(2)\qquad \sum_0^\infty u_n=\frac{u_0}{pq}(pq+r)\dots$$

relaţia (2) devine:

$$(3)\qquad \sum_0^\infty u_n=\frac{r+pq}{pqr(p+r)(2p+r)\dots(qp+r)}\dots$$

1°. Dacă în relaţia (3) facem $q=r=1$ şi $p=6$ obţinem:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{[6n+1][6(n+1)+1]}=\frac{7}{6.7}=\frac{1}{6},$$

care este seria (1), adică tocmai problema 544.

2°. Pentru $p=r=1$ relaţia (3) ne dă:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+q+1)}=\frac{1}{q.q!}$$

care generalizează problema No. 5, din „Culegere de Probleme de Algebră" de *A. G. Ioachimescu*, Cap. XXXI.

3°. In relaţia (3) punând $q=1$ şi $r=1-p$ se obţine:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{[p(n-1)+1][pn+1]}=\frac{1}{p(1-p)}$$

Se vede deci că putem avea din (3) destule serii interesante.

VIRGIL RAPEANU

CONCURSUL R. M. T.

Revista Matematică din Timişoara, publică concurs între corespondenţii săi elevi de liceu, pentru a se acorda un număr de premii celor mai harnici.

Şi anul acesta pentru a ţine seamă de studiile

făcute şi a pune faţă în faţa concurenţi cât se poate de egali, premiile se vor da pe clase şi anume:

Pentru cl. V un premiu de 500 lei
Pentru cl. VI un premiu de 500 lei
Pentru cl. VII un premiu de 1000 lei
Pentru cl. VIII un premiu de 1000 lei.

Cine doreşte să ia parte la concurs va trebui să se înscrie la d-l *Prof. V. Alaci,* str. General Foch 27, Timişoara. In scrisoare se va indica numele, clasa şi liceul la care urmează.

Pentru a putea fi înscris candidatul trebue să fie abonat pe anul în curs.

Candidatul va trebui să rezolve cât mai multe din *problemele de concurs* publicate în numerile 9, 10, 11 şi 12 şi care vor fi însemnate cu un asterisc *).

Inscrierile se primesc până la 1 Ianuarie 1928.

Clasificarea se face după închiderea concursului în modul următor:

Fiecare problemă de concurs, care a fost propusă în aceste patru numere şi a cărei soluţie justă, bine şi îngrijit redactată este primită, dă dreptul la 5 puncte.

Fiecare problemă simplă, propusă în aceste patru numere şi a cărei soluţie justă, bine şi îngrijit redactată este primită, dă dreptul la 2 puncte.

Fiecare problemă rezolvată de concurent şi publicată în numerile 4, 5, 6, 7, 8, ale revistei dă dreptul la un punct.

Premiile se vor acorda pe clase, acelor ce întrunesc cel mai mare număr de puncte. Următorii doi vor fi menţionaţi. Comisiunea va putea refuza acordarea premiului dacă nivelul general al candidaţilor din o clasă s'ar arăta nesatisfăcător. In caz când doi candidaţi ar avea acelaş număr de puncte se va examina activitatea din trecut şi redactarea problemelor pentru a se acorda preferinţă.

Comisiunea pentru alegerea problemelor, triarea soluţiilor şi acordarea premiilor se compune din d-nii: Rector *V. Vâlcovici,* Prof. *V. Alaci,* Colonel *Gh. Buicliu,* Prof. *A. Coman* şi Ing.-şef *C. Teodorescu.*

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Geometrie

15 Octombrie 1927

I.

Fie A B perpendiculara comună dreptelor paralele Δ şi Δ'. Se ia un punct M pe Δ'. Perpendiculara în M pe A M întâlneşte pe Δ în C. In C se construeşte o dreaptă C D care face cu C A un unghiu D C A egal cu dublul unghiului C A M. Să se demonstreze că lungimea perpendicularei din A pe C D este egală cu dublul distanţei A B

II.

Se dă exagonul regulat A B C D E F de latură a şi se cere să se găsească un punct M pe perimetrul exagonului, aşa în cât dreapta A M se împartă exagonul în două părţi ale căror suprafeţe să fie în raportul 1 la 3.

Să se calculeze apoi A M în funcţie de a.

III.

Fie L, M, A mijloacele laturilor B C, C A, A B ale unui triunghiu A B C. Perpendiculara în L pe B C întâlneşte pe A C în P şi pe A B în Q. Se consideră un punct S pe dreapta L P Q şi fie D intersecţia lui N S cu B C iar E intersecţia lui M S cu B C. Să se demonstreze că avem:

$$L D \cdot L P = L Q \cdot L E.$$

Algebră

I.

Să se determine coeficienţii a şi b astfel ca derivata funcţiunei:

$$Y = L\frac{x+2}{(x-2)^2} + \frac{a}{2} L(x^2+4) + \frac{b}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2},$$

să se anuleze pentru $x = 1$ şi $x = 3$.

Punând în locul lui a şi b valorile găsite, se cere să se studieze variaţiunea funcţiunei date.

(L este simbolul logaritmului neperian).

II.

Să se determine a astfel ca ecuaţiunea:

$$36x^4 - 84x^3 + 43x^2 + ax - 6 = 0,$$

să aibă suma a două rădăcini, egală cu suma celorlalte două.

Punând pentru a valoarea găsită, să se afle rădăcinele ecuaţiei date.

Trigonometrie

1. Pe dreapta D se dau punctele A, B, C aşa că distanţele:

$$AB = a \text{ și } AC = b,$$

sunt cunoscute.

Să se determine pe perpendiculara în A la dreapta dată D punctele din care segmentul B C se vede sub unghiul maxim.

2. Să se arăte că expresia:

$$E = 2\,(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3\,(\cos^4 x + \sin^4 x)$$

are o valoare constantă.

3. Să se exprime în radiani arcul de 157° 30′ și să i se calculeze funcțiile trigonometrice.

BIBLIOGRAFIE

1, *Gazeta Matematică*, anul XXXIII, No. 2, Octombrie 1927. Calculul aproximativ al ariilor, de *I. Ionescu*. O interpretare, de *Dan Barbilian*.

2. *Bulletin mathématique de la société roumaine des sciences*, Tome 30, fasc. 1. Janvier-Juin 1927. Lista membrilor Societății Române de Științe Matematice. Sur la relation entre l'addition et la multiplication, par *Octave Onicescu*. Sur le nombre transfini ω^ω, par *G. Sudan*. Mémoire sur les polynomes $R_\nu^\rho(x \mid \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_\rho ; \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\rho)$, par *Rodolphe Raclis*. Fonctions fuchsiennes et kleinéennes de deux variables, par *Octave Onicescu*. Procesele-verbale ale ședințelor „Societății Române de științe matematice" din 20 Ianuarie, 7 și 21 Februarie, 7 și 21 Martie și 4 Aprilie 1927.

3. *Curierul Matematic*, vol. III, No. 8, Octombrie 1927, (litografiat). Câteva identități de S-lt. *Mih. I. Focșeneanu*.

4. *Revista Matematică din Galați*, anul III, N-rile 6 și 7, cuprind: Teorema lui *Ceva* pentru o varietate cu *n* dimensiuni, de *Er. Caraman*. Despre explosivi, de *D. Stănescu*. Quadraturi aproximative, de *O. Orănescu*. O generalizare, de *Gh. Th. Gheorghiu*. Asupra unui determinant, de *Gh. Th. Gheorghiu*.

Această revistă scrisă cu îngrijire și cuprinzând chestiuni frumoase o recomandăm corespondenților noștri. (Abonamentul, 90 lei, adresa d-lui *Alex. Grigoriu*, str. Thenea 103, Galați).

5. *P. Sergesco*. Sur une formule de récurrence propre au calcul de certaines intégrale. (Extras din Matheris).

6. *Miron Nicolesco*. Sur les fonctions de bipoints et les fonctions areolairemcnt conjuguées (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 22 août 1927).

7. *David Emmanuel. Lecțiuni de Teoria Funcțiunilor. Funcțiuni eliptice.* (472 pagini). Acest volum împreună cu primul formează cel dintâi curs complect, tipărit în românește, de teoria funcțiunilor. Cu claritatea și luminozitatea lor consacrate, cu nivelul lor ridicat și spiritul lor pătrunzător, aceste lecțiuni sunt sortite să fie de un real folos studenților noștri de azi și de mâine. Acest al 2-lea volum cuprinde următoarele capitole: Funcțiuni analitice de două variabile. Funcțiuni algebrice. Exemple de funcțiuni algebrice. Suprafețele lui *Riemann*. Funcțiuni uniforme pe suprafețele lui *Riemann*. Funcțiuni raționale pe o suprafață T cu două foi. Integrale eliptice. Integrala eliptică de speța I. Teorema lui *Abel* pentru adițiunea integralelor eliptice de speța I. Transformarea integralei eliptice de speța I prin substituțiuni liniare. Inversiunea integralei de speța I. Funcțiuni dublu periodice. Funcțiunile σu ζu, pu. Multiplicațiunea argumentului funcțiunii pu. Relațiuni algebrice între funcțiuni eliptice. Ecuațiunea algebrică între o funcțiune eliptică și derivata sa. Funcțiunea σ cu indici. Funcțiunile eliptice ale lui *Iacobi*.

Expresiunea funcțiunii ζu, pu prin serii de funcțiuni simplu periodice. Funcțiunile σu, $\sigma_\alpha u$ exprimate prin produse de funcțiuni simplu periodice. Funcțiuni eliptice de speța II și de speța III. Degenerarea funcțiunilor eliptice. Funcțiunea pu cu invarianți reali. Problema inversiunei. Integrale eliptice. Transformarea funcțiunilor eliptice. Problema diviziunei. Calculul numeric al funcțiunilor eliptice. Aplicațiuni geometrice. Funcțiuni modulare. Teoremele d-lui *Picard*. 4 Note.

8. *Traian Lalescu. Curs de Geometrie Analitică.* Fascicola IV, (224 pag.). Pentru a învedera importanța acestei lucrări pentru trebuințele studenților noștri, vom da loc prefației d-lui Prof. *Lalescu*.

„Cu această fascicolă am terminat publicarea tratatului de Geometrie Analitică, publicare începută acum câțiva ani. Noua fascicolă cuprinde studiul analitic al curbelor și suprafețelor generale, adică tratează materia cunoscută în programele de licență sub numirea de „Aplicațiile Geometrice ale Calculului infinitezimal", numire destul de improprie pentru timpurile de astăzi.

Spre deosebire de celelalte fascicole. care se mărgineau aproape strict la expunerea cursului profesat la Școala Politechnică, am dat fasciculei a 4-a o mai mare desvoltare, căutând să cuprind întreaga materie, care se tratează deobicei sub acest titlu, în programele de licență. Motivele pentru care m'am hotărît să procedez astfel sunt, în primul rând, importanța intrinsecă a materiei și în al 2-lea rând, trebuie să o mărturisesc și împrejurarea că această fascicolă este cea dintâi carte românească, care tratează această materie. Este bine ca studenții noștri — mai ales în vremurile acestea de scumpete a cărții străine, — să găsească în limba românească, tratate în care materia respectivă să fie cât mai complect tratată. Unitatea planului a fost însă menținută toate chestiunile speciale, cum sunt de pildă, proprietățile geometrice speciale ale cubicelor, cuarticelor, etc., au fost sistematic lăsate la o parte, de asemenea s'au întrebuințat aproape exclusiv coordonate rectangulare.

In legătură cu acest tratat, ar mai rămâne de publicat:

1. O carte cuprinzând metodele speciale ale Geometriei, cum sunt diferitele sisteme de coordonate speciale, metodele vectoriale, metodele proective și duale ș. a. m. d., metode care permit să se adâncească mai mult studiul proprietăților geometrice speciale.

2. O carte cuprinzând postulatele Geometriei, adică legătura dintre știința geometriei și natură. Astăzi o asemenea carte nu se poate compune decât pe temeiul calculului tensorial, care a introdus în această materie unitate și preciziune.

Aceste două publicațiuni, în cari mi-am rezervat a trata și chestiunile speciale, pe carc le-am lăsat la o parte în tratatul de față, le voi publica — dacă timpul îmi va îngădui, în anii viitori".

Acest tratat, cu expunere clară și luminoasă, izvorît din dragostea nețărmurită a d-lui Prof. *Traian Lalescu*, de a îmbogăți știința românească cu o lucrare didactică importantă, o recomandăm călduros studenților noștri. (150 lei).

9. *N. Abramescu. Lecțiuni de geometrie analitică, urmate de introducerea elementară în studiul analitic al geometriilor neeuclidiene și noțiuni elementare de geometria vectorială.*

Pentru a învedera importanța acestei dezvoltate lucrări didactice (620 pag.) a neobositului și distinsului profesor universitar dela Cluj, d-l *N. Abramescu*, vom da loc unei părți din prefața scrisă de d-l Profesor universitar *Gh. Țițeica*. D-sa vorbind de impresia care se desprinde din cuprinsul cărții, spune: „*E dorința de a cunoaște cât mai multe proprietăți, de a ști și de a înțelege acea lume abstractă, frumos ordonată, cu proprietăți admirabile. E, un nepotolit neastâmpăr a întinde orizontul dincolo de ceeace a cuprins mintea omenească până astăzi. E nesfârșita dragoste de știință, care a mânat în trecut și va însufleți și în viitor atâți oameni de știință.*

Acest entuziasm, pe care d-l Abramescu l'a turnat în volumul său de Geometrie Analitivă, îl cunosc de mult. Am cunoscut entuziasmul elevului de liceu, corespondent la Gazeta Matematică, al studentului și al profesorului de liceu. Rar exemplu, mai ales la noi, de stăruință și de dragoste nețărmurită de știință. Ba e ceva mai mult. E un exemplu de voință titanică și mai rară, care merită să fie cunoscută, ca să servească de pildă".

Recomandăm călduros și acest bogat tratat studenților noștri (535 lei).

10. *Ioan Dumitriu, Geometrie Analitică.* Exerciții și probleme pentru clasa VIII R. Este un volum litografiat (144 pag.), care cuprinde o culegere interesantă de probleme, de geometrie analitică cu soluțiile lor, pe care o recomandăm stăruitor corespondenților noștri, (100 lei, adresa la autor, str. Bucur 5, Arad, sau la tipografia Diecezană, Arad).

PROBLEME REZOLVATE

640. — *Să se arate că fiecare din expresiile:*

$$N_1 = 1308736^{97} - 174^{194}$$

$$N_2 = 435600 \times 660^{95} + 63922,$$

se divide cu 659.

POPESCU D. STELIAN

Observăm că putem scri succesiv:

$$N_1 = 1308736^{97} - (174^2)^{97} = (\text{mult. } 659 - 38)^{97} -$$

$$30276^{97} = (\text{mult. } 659 - 38)^{97} - (\text{mult. } 659 - 38)^{97} =$$

$$\text{mult. } 659 + (-38)^{97} - (-38)^{97} = \text{mult. } 659.$$

$$N_2 = (\text{mult. } 659 + 1)(\text{mult. } 659 + 1)^{95} +$$

$$(\text{mult. } 659 - 1) = \text{mult. } 659 + 1 - 1 = \text{mult. } 659.$$

Vedem dar că atât N_1, cât și N_2 sunt multipli de 659.

Observare. In mod analog, am fi dovedit, că numerile:

$$N_1 = 1308736^a - 174^{2a}$$

$$N_2 = 435600 \times 600^b + 63922,$$

unde a și b sunt întregi pozitiv, sunt divizibile cu 659.

Soluții date de d-nii *Albeață N. Emil* (lic. P.-Neamț), *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Boncea Spiridon* (lic. Pitești), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iași), *Cristescu C. Ion* (lic. Lazăr, București), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Fr, Buzești, Craiova), *Dăscălescu St. Hristache* (lic. Focșani), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dobrovicescu P.* (lic. Caracal), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Floareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. Piatra-Neamț), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Haim F. L.* (lic. Piatra-Neamț), *Hamparțum R. Gr.* (lic. Constanța), *Hohoi Vasile* (lic. Brașov), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Levy Jacques* (lic. Matei-Basarab, București), *Murărdiu Ionel* (lic. Brașov), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Petrică Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Pleșoiu P.*, *Podariu Alexandru* (P.-Neamț), *Popescu St. Toma* (lic. Pitești), *Popescu C. Virgiliu* (Târgoviște), *Popovici M.* (Focșani), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin Arnold* (lic Focșani), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța) și *Zaharia O. Nicolae* (Constanța).

In ultimul timp s'au primit soluțiuni dela d-nii: *Căzămir Iosif* (lic. Arad), *Ignat M. Paul* (lic. Milit., Iași), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit, Iași), *Mocuța T. Traian* (lic. Arad) și *Panaite I. Teodor* (lic. Milit., Iași).

641. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel ca numărul format din prima cifră urmată de suma celei de a doua și a patra cifră, să fie rădăcina lui patrată.*

SAVIN IOAN

Fie N^2 numărul de patru cifre căutat, trebuie să avem:

$$1000 \leqq N^2 < 10000$$

sau:

$$32 \leqq N < 100.$$

Pentrucă numărul format de prima cifră urmată de suma celei de a doua și a patra să fie rădăcina patrată a numărului cerut, urmează că atât patratul cerut, cât și rădăcina lui patrată, încep cu aceiași cifră.

Observăm însă că patratele numerilor dela 32 la 94 n'au prima cifră egală cu prima cifră a numerilor care s'au ridicat la patrat, astfel că soluțiile căutate nu se pot găsi decât printre patratele numerilor dela 95 la 99, adică printre patratele:

$95^2 = 9025$, $96^2 = 9216$, $97^2 = 9409$, $98^2 = 9604$

și $99^2 = 9801$.

Dintre aceste patrate perfecte, numai 9025 și 9801, îndeplinesc condiția că numărul format de prima cifră urmată de suma celei de a doua și patra să fie rădăcina lor patrată. Deci 9025 și 9801 sunt patratele cerute.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț) *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Boncea Spiridon* (lic. Pitești), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Cristescu C. Ion* (lic. Lazăr, București), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dinu S. D-tru* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Floareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Hamparțum Grigore* (li . Constanța), *Hohoi V.* (lic. Brașov), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova). *Levy Jacques* (lic. Matei-Basarab, București), *Mihăescu I. Virgil* (lic. R.-Sărat), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Panaitescu C. Ion* (lic. Milit., Craiova), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Pispiris D. Gheorghe* (Bârlad), *Popescu St. Ioma* (lic Pitești), *Popescu C. Virgiliu* (Târgoviște), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Tomescu Valeriu* (lic. Lazăr, București), *Tudose C Tănase* (lic. Câmpina), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Șc. Polit., Leoben), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Au găsit numai soluția, 9801, d-nii: *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Cernăuți Iosif* (Panciu), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Fericeanu Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, București), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București). *Scarlat V. D.* (lic. Câmpina), *Scurtu G. Niculae* (Brașov), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina) și *Vâlceanu Justin* (lic. Tg.-Jiu).

Au găsit numai soluția 9025, d-nii: *Dăscălescu Hristache* (lic. Focșani), *Pârvulescu M. Ștefan* (lic. Milit., Craiova), și *Podariu Alexandru* (P.-Neamț).

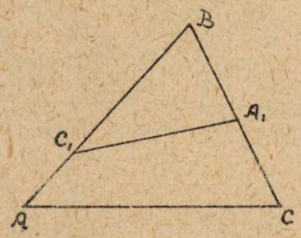
In ultimul timp s'au primit soluțiuni dela d-nii: *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Bucurescu I.* (lic. Odorheiu), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași) și *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iași).

642. — *Fie* A B C *un triunghiu oarecare și* C_1 *un punct pe* A B *între* A *și* B. *Se determină punctul* A_1 *pe* B C *astfel ca să avem:*

$$\left(\frac{C_1 A}{C_1 B}\right)^2 = \frac{A_1 C}{A_1 B} = k^2.$$

Să se afle aria patrulaterului $A A_1 C C_1$ *în funcție de suprafața triunghiului* A B C.

ALEXANDRU NICULESCU



Din rapoartele date deducem:

$$\frac{C_1 A}{C_1 B} = k, \qquad \frac{A_1 C}{A_1 B} = k^2.$$

Aplicând o proprietate bine cunoscută a proporțiilor, și obs rvând figura, putem scri:

$$\frac{C_1 A + C_1 B}{C_1 B} = \frac{A B}{C_1 B} = k + 1,$$

$$\frac{A_1 C + A_1 B}{A_1 B} = \frac{B C}{A_1 B} = k^2 + 1,$$

de unde deducem:

$$(1) \qquad C_1 B = \frac{A B}{k+1}, \quad A_1 B = \frac{B C}{k^2+1}$$

Insemnând cu *s*, S, S_1 respectiv suprafețele triunghiurilor $A_1 B C_1$, A B C și a patrulaterului $A A_1 C C_1$ și folosind formula care dă suprafața unui triunghiu în funcție de două laturi și unghiul cuprins, putem scri:

$$s_2 = \frac{1}{2} C_1 B \cdot A_1 B \sin B,$$

sau ținând seamă de (1), avem:

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \sin B \frac{1}{(k+1)(k^2+1)} = \frac{S}{(k+1)(k^2+1)}.$$

De altă parte observăm, că:

$$S_1 = S - s_1 = S - \frac{S}{(k+1)(k^2+1)} = \frac{(k^3+k^2+k)S}{(k+1)(k^2+1)} = \frac{k^3-1}{k^4-1} k \cdot S.$$

Avem astfel suprafața patrulaterului AA_1CC_1 în funcție de suprafața S a triunghiului ABC.

Soluții date de d-ni: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Dinu S. D-tru* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Dănciulescu Gr. Virgil* (lic. Buzești, Craiova), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București) și *Roman I. P. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București).

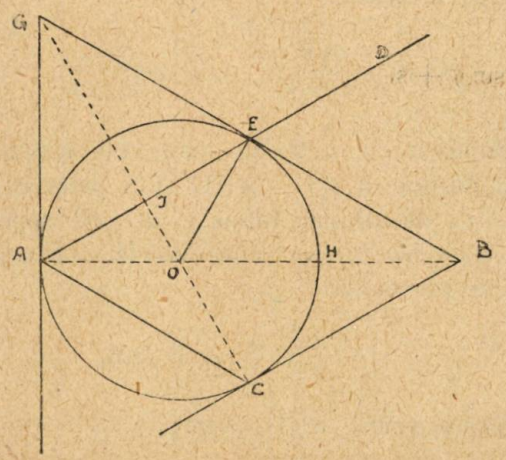
643. — *Se dă un cerc* O *de raza* R. *Se duce diametrul* AH *prelungit cu o rază până în* B. *Din punctul* A *se duce o dreaptă* AD *astfel, ca:*

$$\sphericalangle BAD = 30^0.$$

Tangenta în punctul A *întâlnește tangenta dusă din* B *la cerc, în punctul* G. *Unim punctul* G *cu centrul și prelungim până în* C *punctul unde ducem altă tangentă. Să se demonstreze că:*

1°. Triunghiul BOG *este isoscel. 2°. Patrulaterul* ACBG *este un trapez isoscel. 3°. Dreapta* GO *este perpendiculară în* I *pe* AD.

C. N. BALASESCU



1°. Fie E și G punctele unde tangenta din B întâlnește cercul O și tangenta din A. In triunghiul dreptunghic OEB, cateta OE fiind jumătate din ipotenuză, urmează că:

$$HE = HO = OE = R,$$ (R raza cercului O),

adică că triunghiul HOE este echilateral. Atunci:

$$\sphericalangle HOE = 60^0,$$

deci:

(1) $$\sphericalangle EBO = 30^0.$$

Deducem încă:

$$\overset{\frown}{HE} = 60^0, \quad \overset{\frown}{AE} = 120^0 \text{ și } \sphericalangle EAB = 30^0,$$

ceiace învederează că AD întâlnește cercul tocmai în punctul E. Unind O cu G, din egalitatea triunghiurilor dreptunghice OAG și OEG (care au ipotenuza OG comună și AO=OE=R), rezultă:

(2) $$\sphericalangle AGO = \sphericalangle OGE.$$

și fiindcă:

$$\text{măs.}\overset{\frown}{AGE} = \text{măs.}\frac{\overset{\frown}{ACE} - \overset{\frown}{AE}}{2} = \frac{240^0 - 120^0}{2} = 60^0$$

rezultă că:

(3) $$\sphericalangle OGE = 30^0.$$

Din (1) și (3) urmează că:

$$\sphericalangle EBO = \sphericalangle OGE,$$

adică că triunghiul BOG este isoscel.

2°. Prelungim pe GO până întâlnește cercul O în C. Unghiul BOC fiind exterior triunghiului BOG, este de 60°, atunci:

$$\overset{\frown}{HC} = 60^0,$$

adică punctul C este simetricul lui E față de AB, deci BC este tangenta la cerc în C.

Fiindcă:

$$\sphericalangle CAH = 30^0,$$

arcul HC fiind de 60°, și fiindcă:

$$\sphericalangle EBA = 30^0,$$

urmează că cele două unghiuri alterne-interne CAH și EBA, sunt egale și deci dreptele AC și BC sunt paralele.

Patrulaterul A C B G este astfel un trapez, și fiindcă unghiurile dela bază C B G și A G B sunt egale ca având fiecare 60°, urmează că A C B G este un trapez isoscel.

3°. Punctele G și O fiind egal depărtate de extremitățile dreptei A E, fiindcă:

$$O A = O E = R,$$

și:

$$A G = G E,$$

fiind tangentele duse la cerc din G, urmează că dreapta G O este perpendiculară în I, pe A E.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Alexandrescu I.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Boiloiu D. Nicola* (lic. Târgoviște), *Boncea S.* (lic. Pitești), *Cernăuți I.* (lic. Timișoara), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Crăciunescu N. Eugen, Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focșani), *Dimitriu At Ioan* (lic. Galați), *Dinu S. D-tru* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Drăgan I. Corneliu* (lic. Botoșani), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timișoara), *Dutchevici M.* (lic. Milit., Iași), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Fericeanu Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Floareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiev Nicolae, Gheorghiu Alexandru, Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru-Haret, București), *Hohoi Vasile* (lic. Brașov), *Iancu D.* (lic. Național, Iași), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Ionescu Gh. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Kielburger Mihail* (Șc. Polit., Timișoara), *Magda Ovidu* (lic. Cluj), *Marineanu T. Traian* (Șc. Polit., Timișoara), *Mărculescu I. Origen* (lic. Carol, Craiova), *Murăroiu Ionel* (Brașov), *Novac Aurel* (lic. Cluj), *Novac Valeriu* (Arad), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Petrovlci D.* (lic. Câmpina), *Pleșoiu P., Podariu Alexandru* (P.-Neamț), *Popescu St. Toma* (lic. Pitești), *Popescu C. Virgiliu* (Târgoviște), *Popovici M.* (Focșani), *Procopiescu Nistor* (Caracal), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Rumânică Ioan* (lic. Brașov), *Sabetay L. Andrei* (T.-Severin), *Saur A. Ioan* (lic. Arad), *Scarlat V. D.* (lic. Câmpina), *Scurtu A. Nicolae* (lic. Brașov), *Sirchis Ion* (lic. Tighina), *Șișu Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați, *Steblea Șt. Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Șc. Polit. Leoben, Austria), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ion* (lic. Tg.-Jiu), *Weintraub Mandy* (lic. Lazăr, București) și *Zaharia O. Niculae* (lic. Constanța).

In ultimul timp s'au primit soluțiuni dela d-nii: *Bucurescu C. I.* (lic. Odorheiu), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Cioclov Gheorghe* (lic. T.-Severin), *Cocârlan Pavel* (lic. Timișoara), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, București). *Ignat M. Paul* (lic. Milit., Iași), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Mocuța T. Traian* (lic. Arad), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iași) și *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Popescu N. I.* (Cluj),

645. — *Fie ecuația:*

$$x^2 + p x + q = 0,$$

cu rădăcinile:

$$\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}, \quad \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2}.$$

Să se formeze ecuația ce admite ca rădăcini pe:

$$\sin \varphi, \quad \sin \varphi_1.$$

AURELIAN I. STAN

Intre rădăcinele și coeficienții ecuației date, putem scri relațiile:

$$(1) \quad \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2} = -p, \quad \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2} = q.$$

Ținând seamă apoi de relația cunoscută:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

putem scri evident:

$$(2) \quad \sin \varphi + \sin \varphi_1 = \frac{2 \operatorname{cot} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi_1}{2}} + \frac{2 \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2}}{1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi_1}{2}}$$

$$= 2 \frac{\left(\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2}\right) + \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2} \left(\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2}\right)}{1 + \left(\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2}\right)^2 - 2 \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi_1}{2}}$$

$$(3) \quad \sin \varphi \sin \varphi_1 = \frac{4 \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2}}{1 + \left(\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2}\right)^2 - 2 \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi_1}{2}}$$

Aceste relaţiuni (2) şi (3), în virtutea relaţiilor (1), devin:

$$\sin\varphi+\sin\varphi_1=\frac{-2p-2pq}{1+p^2-2q+q^2}=-\frac{2p(q+1)}{p^2+(q-1)^2}$$

$$\sin\varphi\,.\,\sin\varphi_1=\frac{4q}{p^2+(q-1)^2}.$$

Având suma şi produsul rădăcinilor $\sin\varphi$, $\sin\varphi_1$, ecuaţia de gradul al 2-lea cerută, este:

$$x^2+\frac{2p(q+1)}{p^2+(q-1)^2}x+\frac{4q}{p^2+(q-1)^2}=0,$$

sau:

$$[p^2+(q-1)^2]x^2+2p(q+1)x+4q=0.$$

Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Emil* (lic. P.-Neamţ), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Balaban I. Gheorghe* (lic. Bârlad), *Birkental Alexandru* (lic. Lazăr., Bucureşti), *Cernăuţi Iosif* (lic. Timişoara), *Climescu C. Alex.* (Semin. Pedag., Iaşi), *Craiu N. Ioan* (lic. Piteşti), *Crăciunescu N. Eugeniu*, *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focşani), *Dimitriu Al. Ioan* (lic. Galaţi), *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Floareş I. Mircea* (lic. Bacău), *Gheorghiev Nicolae* (lic. Bolgrad), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Hohoi Vasile* (lic. Braşov), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Mărăşescu Ioan* (Şc. de Conductori, Cluj), *Mărculescu I. Origen* (lic. Carol, Craiova), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Petrovici D-tru* (lic. Câmpina), *Podariu Alexandru* (P.-Neamţ), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu St. Toma* (lic. Piteşti), *Popovici M.* (Focşani), *Savin Arnold* (lic. Focşani), *Scarlat V. D.* (lic. Câmpina), *Scurtu Nicolae* (Braşov), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Slicaru C.* (lic. Naţional, Iaşi), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Şc. Polit. Leoben, Austria), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) şi *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa).

In ultimul timp s'au primit soluţiuni dela d-nii: *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Cocârlan Pavel* (lic. Timişoara) şi *Procopescu St. Nestor* (lic. Caracal).

PROBLEME PROPUSE

674. — Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre semnificative, ştiind că numărul format de cifra a doua urmată de cea de a treia şi a patra este egal cu cubul diferenţei dintre ultima cifră şi prima cifră.

COSNITA CEZAR

675. — Să se verifice inegalitatea:

$$\frac{(a+c)[4b^2+(a+c)^2]}{abc}\geqq 16,$$

a, b, c fiind numere reale şi pozitive.

C. D. IONESCU-ŢIU

676*. — Să se calculeze limita expresiei:

$$E=\frac{\sqrt[3]{15x^3-7x^2+18x-3}-\sqrt{2x^2+7x+3}}{\sqrt[2]{x^4-2x^3+8x^2-3x+6}-\sqrt[4]{2x^3-3x^2+8x-4}}$$

GH. V. NICOLAU

677*. — Să se găsească soluţiile întregi ale ecuaţiei:

$$2x^2-3y^2=5.$$

GH. CONSTANTINESCU

678. — Fie $A'B'C'$ triunghiul format din bisectoarele exterioare ale unui triunghiu oarecare ABC. Se ia în senzul IA, segmentul $AA''=IA$, $BB''=IB$, $CC''=IC$, I fiind centrul cercului înscris triunghiului ABC. Să se arate că:

1°. Punctele A', B', C', A'', B'', C'' sunt concilice.

2°. Triunghiurile ABC şi $A''B''C''$ sunt ortologice.

GH. I. BALABAN

679. — Se dă o conică şi prin unul din focarele ei se duce o dreaptă. Prin polul P al acestei drepte se duce o paralelă la axa mare, sau axa transversă, care taie dreapta în M. Fie N mijlocul lui MP. Se cere locurile geometrice ale lui M şi N. Care e locul lui N în cazul când conica este o parabolă? Să se explice acest din urmă rezultat geometric.

NICOLAE I. MANOLESCU

680*. — Să se stabilească identitatea:

$$1-\cos 5t-2\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\cos(k+1)t=\sin 5t\,\operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

V. ALACI

681*. — Să se rezolve ecuaţia:

$$8\cos^6 x-8\cos^4 x+4\cos^2 x-1=0.$$

ION Z. PANTU

INFORMAȚIUNI

La 15 Octombrie, a avut loc concursul de admitere la Școala Politecnică din Timișoara. S'au înscris 112 candidați dintre care numeroși corespondenți ai acestei reviste,

La probele scrise și orale s'au prezentat 96 candidați din care au fost admiși în ordinea clasificației următorii:

1. Kielburger M., prep. Lic. German-Maghiar, Timișoara
2. Zamfirescu Gh., prep. „ Matei-Basarab, București
3. Popovici M. . . . „ Unirea, Focșani
4. Câlniceanu Gh. . . „ C. D.-Loga, Timișoara
5. Curcubătă D. . . . „ A. Șaguna, Brașov
6. Preda L. . . . . „ Gh. Lazăr, Sibiu
7. Grigorescu C. . . „ N. Bălcescu, Brăila
8. Popovschi V. . . . „ A. Rusu, Chișinău
9. Șișu Gh. prep. . . Șc. Sup. Comerț, Arad
10. Berneagă Gh. . . . Sem. Pedag. Univ., Iași
11. Chițan Gr. . . . . Lic. Tecnic Agricol, Soroca
12. Stan C. . . . . „ Roman-Vodă, Roman
13. Stancov D., prep. „ real, Comrat
14. Niculescu Gh. . . . „ Unirea, Focșani
15. Popescu I. . . . . „ Unirea, Focșani
16. Todor N. . . . . „ A. Vlaicu, Orâștia
17. Cutcudache P. . . „ Sf. Sava, București
18. Georgescu Gh. . . „ V. Alexandri, Galați
19. Spătariu I. . . . . „ Gh Barițiu, Cluj
20. Mircea N. . . . . „ C. Brediceanu, Lugoj
21. Anastasiu V. . . . „ Laurian, Botoșani
22. Aldea V. . . . . Șc. Conductori Tecnici, Cluj
23. Balazs A. . . . . Lic. I. Meșotă, Brașov
24. Stepănescu C., prep. „ G-ral Dragalina, Oravița
25. Petreanu P. . . . „ Gh. Barițiu, Cluj
26. Atanasescu D., prep. „ Gh. Lazăr, București
27. Ganea M., prep. . . Șc. Cond. Publici, Cernăuți
28. Tănăsoiu M., prep. . Lic. de băeți, Bolgrad
29. Antistescu N. . . . „ Laurian, Botoșani
30. Dumitrescu I. . . . „ Unirea, Focșani
31. Gheorghiu C., prep. „ C. D.-Loga, Timișoara
32. Iüstel T. . . . . „ Bruckenthal, Sibiu
33. Antonescu E. . . . Semin. Pedag. Universitar, Iași
34. Antonescu Gh. , . Lic. Laurian, Botoșani
35. Steblea Șt., prep. . Șc. Sup. Meserii, București
36. Badea C. . . . . Lic. Frații Buzești, Craiova
37. Zaretchi M. . . . „ A. D. Xenopol, Soroca
38. Bișir Gh. . . . . „ Ion Vodă Cahul
39. Iorga St. . . . . Gh. Barițiu, Cluj
40. Marineanu T. . . . „ C. D.-Loga, Timișoara
41. Purcariu I. . . . . Șc. Cond. Tecnici, Cluj
42. Doroftei R., prep. . Lic. A. Pumnul, Cernăuți
43. Ivanov E. . . . . „ de băeți, Bolgrad
44. Pușcariu L. . , . . „ Gh. Barițiu, Cluj
45. Vuia Tr., prep. . . „ C. D.-Loga, Timișoara
46. Drăghiceanu M. . . „ A. Șaguna, Brașov
47. Golubenco B. . . . „ A. Rusu, Chișinău
48. Fericean St., prep. . „ M. Nicoară, Arad
49. Minoiu I. . . . . „ Gh. Lazăr, Sibiu
50. Păun C. . . . . „ Unirea, Focșani
51. Bogdan V. . . . . „ Gh. Lazăr, Sibiu
52. Catricicău M., prep. „ M. Eminescu, Satu-Mare
53. Constantinescu D. . „ Unirea Focșani
54. Niculescu A. . . . „ Cantemir, București
55. Oniga I. . . . . „ Regele Ferdinand, Turda
56. Colceag I. . . . . „ I. Meșotă, Brașov
57. Dubleșiu C. . . . „ A. Vlaicu, Orăștie
58. Mândru P. . . . . „ Gh. Ghica, Dorohoi
59. Dimoviceanu D. prep. „ Carol I, Craiova
60. Dunu I. . . . . „ A. Vlaicu, Orăștie
61. Selariu E. . . . . Șc. Sup. Comerț, Hațeg
62. Dâmboi E., prep. . Lic. T. Maiorescu, Cluj
63. Isaicu I. . . . . „ Gh. Lazăr, Sibiu
64. Lütsch I., prep. . . „ Rom.-Catolic, Brașov
65. Popa St., audit. prep. „ Decebal, Deva
66. Roșca I. . . . . Șc. Cond. Tecnici, Cluj
67. Milculescu M. . . . Lic. Regele Ferdinand, Bacău
68. Mișa N. . . . . „ Traian, T.-Severin
69. Tarția V., prep. . . „ M. Eminescu, Satu-Mare

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

— —

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

— —

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VII. 15 DECEMBRIE 1927 NO. 10

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. ING. C. TEODORESCU. MEDIA ARITMETICA.
2. NOTE MATEMATICE, 20, 21.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 638, 644, 647, 648, 650, 651.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
„Institut de Arte Grafice Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că începând cu anul acesta face parte din comitetul de redacție al Revistei Matematice din Timișoara și d-nul:

Dordea A. Traian, profesor de matematici la liceul din Oltenița.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-șef C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Adminstrația Revistei, și se poate procura în shimibul prețului:

Anul I, epuizat
Anul II, broșat, 100 lei
Anul III, broșat, 100 lei
Anul IV, broșat, 100 lei
Anul V, broșat, 100 lei.
Anul VI, broșat, 100 lei.

ANUL VII — NO. 10. TIMISOARA, 15 DECEMBRIE 1927

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

MEDIA ARITMETICA

de ING C. TEODORESCU

1. In științele aplicate trebue totdeauna să facem diferite măsurări ale cantităților fizice. Și orice măsurare este lovită de o eroare a aparatului sau a observatorului. In afară de greșelile grosolane sau fortuite care nu sunt permise, există în orice măsurătoare o eroare. Dacă am măsura în repetate rânduri o lungime pe teren de ex., la fiecare dată am găsi altă valoare. Și nu ne putem impune altă restricțiune decât ca eroarea ce o facem să rămână sub o anumită limită.

Dupăce însă am făcut mai multe măsurări ale unei aceleiași cantități, vom găsi o serie de numere:

$$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots u_n$$

iar valoarea care se apropie cel mai mult de rezultat și care reprezintă măsura definitivă a acestei cantități este media aritmetică a acestor valori:

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1}.$$

2. Cu cât numărul datelor măsurate ce le culegem este mai mare, cu atât media noastră aritmetică are o probabilitate mai mare de a se apropia de rezultatul măsurării. Reluând șirul de numere de mai sus, în ordinea în care le-am obținut, vom avea o serie de medii aritmetice date de:

$$v_1 = \frac{u_0 + u_1}{2}$$

$$v_2 = \frac{u_0 + u_1 + u_2}{2} = \frac{2v_1 + u_2}{2}$$

. . . . . .

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1} = \frac{n v_{n-1} + u_n}{n+1}$$

care oscilează în jurul termenului v_n, rezultatul definitiv.

3. Uneori rezultatul căutat de noi provine din măsurarea a două cantități fizice. Dacă avem să aflăm densitatea unui corp de ex., vom măsura greutatea lui g pe urmă volumul v, și din împărțirea acestor două măsuri vom afla densitatea d.

Repetând acest lucru pentru mai multe probe din materialul a cărui densitate dorim să aflăm vom determina:

$$g_0,\ g_1,\ g_2, \ldots g_n$$

$$v_0,\ v_1,\ v_2, \ldots v_n,$$

din care deducem densitățile:

$$d_0,\ d_1,\ d_2, \ldots d_n$$

a căror medie aritmetică va fi:

$$D_n = \frac{d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n+1}.$$

Dacă însă în loc de a împărți corpul nostru în $n+1$ probe, am fi aflat direct densitatea lui ar fi trebuit să găsim:

$$D'_n = \frac{g_0 + g_1 + \ldots + g_n}{v_0 + v_1 + \ldots + v_n}$$

care se mai poate scrie:

$$D'_n = \frac{v_0 d_0 + v_1 d_1 + \ldots + v_n d_n}{v_0 + v_1 + \ldots + v_n}$$

expresie pe care o cunoaștem ca reprezentând centrul de greutate al elementelor $v_0, v_1, \ldots v_n$ și care este tot o medie. Această medie e mai apropiată de adevăr, corespunzând și naturii fizice a cantității ce dorim a determina, și ar trebui să o luăm în locul mediei aritmetice.

Dacă $v_0 = v_1 = \ldots = v_n$ adică avem probe de volum egal, măsurate în aceleași condiții, media D'_n este identică cu D_n.

Să luăm numai două probe, g_0 și g_1 de volume v_0 și v_1. Densitatea medie va fi:

$$D'_2 = \frac{v_0 d_0 + v_1 d_1}{v_0 + v_1}$$

în care dacă punem $\frac{v_0}{v_1} = \alpha$ vom găsi:

$$D'_2 = \frac{\alpha d_0 + d_1}{\alpha + 1}$$

adică tocmai rezultatul de sub 2, în care considerăm pe d_0 ca medie aritmetică a α măsurători făcute anterior și la care adunăm și ultima măsurătoare.

Media mecanică D'_n este deci tot media aritmetică în care am dat fiecărei măsurări un coeficient de greutate corespunzător cu importanța sa.

4. Să revenim asupra șirului $u_0, u_1, \ldots u_n$, și să admitem că diferiți observatori ar determina câte două din numerile din șirul acesta, luând în urmă media lor:

$$v_{ik} = \frac{u_i + u_k}{2}$$

cu alte cuvinte am face între cele $n+1$ numere combinații de câte două, calculând media lor. Vom obține astfel o serie de valori a căror medie va fi:

$$v = \frac{\sum \frac{u_i + u_k}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n(u_0 + u_1 + \ldots + u_n)}{n(n+1)} = v_n$$

adică aceiași medie aritmetică ca la 2.

Dacă însă admitem că un observator ar putea obține consecutiv aceiași valoare u_i, sau că doi observatori ar obține aceleași valori u_i, u_k, cu alte cuvinte am lua combinațiuni cu repetiție de $n+1$ obiecte luate câte două, atunci am avea de asemenea:

$$v = \frac{\sum \frac{u_i + u_k}{2}}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)(u_0 + u_1 + \ldots + u_n)}{(n+1)^2} = v_n$$

Putem spune că dacă luăm m date în o observațiune și facem media lor:

$$v_m = \frac{u_i + u_k + \ldots + u_l}{m}$$

atunci făcând toate combinațiile posibile, chiar cu repetiție între aceste date, vom obține ca medie:

$$v = \frac{\sum \frac{u_i + u_k + \ldots + u_l}{m}}{(n+1)^m} =$$

$$\frac{m(n+1)^{m-1} \sum u}{m(n+1)^m} = \frac{\sum u}{n+1} = v_n$$

adică media aritmetică a celor $n+1$ valori.

5. Dacă admitem că diferiți observatori ar determina p, q, $r \ldots$ numere din șirul de mai sus, ei ar lua fiecare media lor obținând:

$$v_p = \frac{u_i + u_k + \ldots}{p}$$

$$v_q = \frac{u_i + u_k + \ldots}{q}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

și dacă am face media acestor valori, ele fiind de greutate diferită după numărul de observațiuni făcute ar trebui să luăm după cum am spus la 3:

$$v = \frac{p v_p + q v_q + r v_r + \ldots}{p + q + r + \ldots}$$

și nu mai cădem peste acelaș rezultat v_n, de cât dacă:

$$p + q + r + \ldots = n + 1,$$

căci atunci:

$$v = \frac{p v_p + q v_q + r v_r + \ldots}{p + q + r \ldots} = \frac{\sum u}{n+1} = v_n.$$

Dar numai în cazul când unul sau mai mulți observatori n'au obținut consecutiv aceiași valoare, rămânând altele afară.

6. Precum vedem media aritmetică ne poate reprezenta rezultatul unei serii de observațiuni. Ce se întâmplă când numărul acestor observațiuni crește la infinit?

In acest caz media aritmetică s'ar prezenta sub forma $\frac{\infty}{\infty}$ şi nu putem să-i găsim adevărata valoare.

Ne putem explica lucrurile altfel.

Fie:

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + u_2 + \dots}{n}$$

media a n observaţiuni. Vom numi *abateri*, diferenţele:

$$x_0 = v_n - u_0$$
$$x_1 = v_n - u_1$$
$$x_2 = v_n - u_2$$
$$\dots \quad \dots$$

aşa în cât $\Sigma x = 0$.

Se numeşte *abatere medie patratică*, media patratelor abaterilor adică:

$$a = \sqrt{\frac{x^2}{n}}$$

abatere care caracterizează deci seria de valori de mai sus, şi pe care o privim ca o eroare care afectează fiecare observaţiune.

Media observaţiunilor v_n:

$$v_n = \frac{u_0}{n} + \frac{u_1}{n} + \frac{u_2}{n} + \dots$$

Când fiecare din termeni este lovit de o eroare a, va fi cunoscută cu o eroare:

$$A^2 = \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \dots = n\left(\frac{a}{n}\right)^2$$

$$\therefore \quad A = \frac{a}{\sqrt{n}}$$

rezultă de aci că eroarea valorii medii scade numai cu $\sqrt{n}$ şi când n creşte, scăderea, foarte accentuată la început devine din ce în ce mai slabă.

Cu alte cuvinte nu putem micşora eroarea la zero, mărind la infinit numărul observaţiunilor, şi cel mai convenabil număr de observaţiuni este între 10 şi 20 ori. Peste acest număr scăderea erorii este prea mică, faţă de munca depusă.

NOTE MATEMATICE

20. *Sur une fonction numérique.*

1. Étant donné un nombre entier:

$$(1) \quad N = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \dots + a_n = (a_0, a_1 \dots a_n)$$

nous désignons par:

$$p\,N,$$

le produit des chiffres du nombre N.

Cela posé, nous nous proposons de trouver la somme:

$$(2) \qquad P(N) = \sum_{x=1}^{x=N} p\,x.$$

2. Il est facile de voir que:

$$(3) \quad \begin{cases} P(10) = 1 + 2 + \dots + 9 = 45 \\ P(10^2) = P(10) + 1.(1 + 2 + \dots + 9) + \dots \\ \qquad \dots + 9(1 + 2 + \dots + 9) = P(10) + 45^2 \\ P(10^3) = P(10^2) + 1.1.(1 + 2 + \dots + 9) + \dots \\ \qquad \dots + 9.9.(1 + 2 + \dots + 9) = P(10^2) + 45^3. \end{cases}$$

De ce qui précède on conclut que:

$$(4) \quad P(10^n) = P(10^{n-1}) + 45^n = \frac{45^{n+1} - 45}{44}.$$

3°. Aussi même nous avons:

$$(5) \quad \begin{cases} P(a_n) = \frac{1}{2} a_n (a_n + 1) \\ P(a_{n-1}\, a_n) = \frac{1}{2} a_{n-1} (a_{n-1} + 1) P(10) + \frac{1}{2} a_{a-1}\, a_n (a_n + 1) \\ P(a_{n-2}\, a_{n-1}\, a_n) = \frac{1}{2} a_{n-2} (a_{n-2} + 1) P(10^2) + \frac{1}{2} a_{n-2}\, a_{n-1} (a_{n-1} + 1) P(10) + \frac{1}{2} a_{n-2}\, a_{n-1}\, a_n (a_n + 1) \end{cases}$$

et plus généralement :

$$(6)\quad P(a_0 a_1 a_2 \ldots a_n) = \frac{1}{2}\Big[(a_0+1)a_0 P(10^n) + (a_1+1)a_0 a_1 P(10^{n-1}) + (a_2+1)a_0 a_1 a_2 P(10^{n-2}) + \ldots + (a_n+1)a_0 a_1 a_2 \ldots a_n\Big].$$

4°. En posant :

$$a_n = a_{n-1} = \ldots = a_0 = a$$

on trouve :

$$(7)\quad P\underbrace{(a\,a\ldots a)}_{n+1} = \frac{1}{2}a\,(a+1)\left[\frac{45^2(45^n - a^n}{44(45-a)} - \frac{45(a^n-1)}{44(a-1)} + a^n\right].$$

Pour $a = 1, 9$, nous avons :

$$P\underbrace{(1, 1, \ldots 1)}_{n+1} = \frac{45^{n+1}-1}{44}$$

$$P\underbrace{(9, 9, \ldots 1)}_{n+1} = \frac{45^{n-2}-45}{44}.$$

Par suite :

$$P\underbrace{(99\ldots9)}_{n+1} = 45\,P\underbrace{(11\ldots1)}_{n+1}.$$

N. AGRONOMOF

21. *Asupra cevienelor în triunghiuri.*

Câteva probleme, de drepte concurente, propuse în „Exercices de Géométrie Analitique par *Aubert & Papelier*", ne-au inspirat teorema de mai jos cu ajutorul căreia se pot rezolva o serie de probleme analoage.

Teoremă. Ecuațiunile latu ilor unui triunghiu fiind $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ *și* $D_3 = 0$, *condițiunea necesară și suficientă pentruca dreptele :*

(1) $D_1 + \alpha D_2 = 0$; $D_2 + \beta D_3 = 0$ și $D_3 + \gamma D_1$

să fie concurente este $\alpha . \beta . \gamma = -1$.

Fie :

$$D_1 = Ax + By + C = 0\ ;\ D_2 = A'x + B'y + C' = 0$$

și $$D_3 = A''x + B''y + C'' = 0.$$

Presupunând dreptele (1) concurente, trebue să avem :

$$(2)\quad l(D_1 + \alpha D_2) + m(D_2 + \beta D_3) + n(D_3 + \gamma D_1) \equiv 0$$

sau :

$$(lA + mA' + nA'' + l\alpha A' + m\beta A'' + n\gamma A)x +$$
$$(lB + mB' + nB'' + l\alpha B' + m\beta B'' + n\gamma B)y +$$
$$(lC + mC' + nC'' + l\alpha C' + m\beta C'' + n\gamma C) \equiv 0$$

în care l, m, n sunt trei cantități determinate. Pentruca să avem această identitate trebue ca :

$$lA + mA' + nA'' + l\alpha A' + m\beta A'' + n\gamma A = 0$$
$$lB + mB' + nB'' + l\alpha B' + m\beta B'' + n\gamma B = 0$$
$$lC + mC' + nC'' + l\alpha C' + m\beta C'' + n\gamma C = 0.$$

Rezolvând acest sistem în raport cu α, β, γ obținem :

$$(3)\qquad \alpha = -\frac{m}{l},\quad \beta = -\frac{n}{m},\quad \gamma = -\frac{l}{n}.$$

de unde $\alpha . \beta . \gamma = -1$.

Această condițiune necesară este și suficientă. In adevăr relațiunea (2) subzistă pentru orice sistem de numere proporționale numerilor l, m și n, distribuite în acelaș fel. Putem dar să luăm pentru l o valoare după voie și cum din problemă deducem valorile lui α, β, γ putem determina cu ajutorul relațiilor (3) cantitățile m și n. Cantitățile α, β, γ ; l, m, n în ipoteza $\alpha . \beta . \gamma = -1$ verifică relațiunea (2) ceiace demonstrează teorema.

Aplicațiuni. Pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu ABC se iau respectiv punctele A′, B′, C′ astfel ca dreptele AA′, BB′, CC′ să fie concurente, pe urmă, pe laturile B′C′, C′A′, A′B′ ale triunghiului A′B′C′ se iau respectiv punctele A″, B″, C″ așa fel ca A′A″, B′B″, C′C″ să fie concurente. Să se demonstreze că dreptele AA″, BB″, CC″ trec prin acelaș punct. (A. C. P. No., 52).

Fie $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ ecuațiunile laturilor BC, CA și AB. Ecuațiunile dreptelor AA′, BB′, CC′ vor fi :

$$D_1 + \alpha D_3 = 0,\quad D_3 + \beta D_1 = 0,\quad D_1 + \gamma D_2 = 0$$

cu condițiunea :

$$(1)\qquad \alpha . \beta . \gamma = -1.$$

Ecuațiunea unei drepte care trece prin B′ se scrie :

$$D_3 + \beta D_1 + \gamma D_2 = 0,$$

iar ecuațiunea unei drepte care trece prin C' se scrie:

$$D_1 + \gamma D_2 + \varphi D_3 = 0.$$

Pentruca aceste ecuațiuni să reprezinte aceiași dreaptă trebue ca:

$\frac{\beta}{1} = \frac{\lambda}{\gamma} = \frac{1}{\varphi}$ de unde $\lambda = \beta\gamma$ și $\varphi = \frac{1}{\beta}$

Rezultă că ecuațiunea dreptei $B'C'$ va fi:

$$\Delta_1 \equiv D_3 + \beta D_1 + \beta\gamma D_2 = 0.$$

Analog pentru dreptele $C'A'$, $A'B'$ vom obține respectiv ecuațiunile:

$$\Delta_2 \equiv D_1 + \gamma D_2 + \gamma\alpha D_3 = 0$$

și $$\Delta_3 \equiv D_2 + \alpha D_3 + \alpha\beta D_1 = 0.$$

Ecuațiunile dreptelor $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ vor fi de forma:

$$\Delta_2 + a\Delta_3 = 0, \quad \Delta_3 + b\Delta_1 = 0, \quad \Delta_1 + c\Delta_2 = 0$$

cu condiția $abc = -1$ (2).

Ecuațiunea unei drepte care trece prin A'' se scrie: $\Delta_2 + a\Delta_3 + \mu\Delta_1 = 0$ sau:

$$D_1 + \gamma D_2 + \alpha\gamma D_3 + a(D_2 + \alpha D_3 + \alpha\beta D_1) + \eta(D_3 + \beta D_1 + \beta\gamma D_2) = 0$$

sau:

$$(1 + a\alpha\beta + \beta\mu) D_1 + (\gamma + a + \beta\gamma\mu) D_2 + (\alpha\gamma + a\alpha + \mu) D_3 = 0.$$

(3) Pentruca această dreaptă să treacă prin A este destul ca termenul în D_1 să nu figureze în această ultimă relațiune, deci $1 + a\alpha\beta + \beta\mu = 0$ de unde $\mu = -\frac{1 + a\alpha\beta}{\beta}$.

Ecuațiunea dreptei AA'' se va obține înlocuind pe μ cu valoarea găsită în (3) și ținând seamă de (1) adică: $D_2 = \frac{1}{a\beta} D_3 = 0$. Analog ecuațiunile dreptelor BB'' și CC'' vor fi:

$$D_3 - \frac{1}{b\gamma} D_1 = 0 \quad \text{și} \quad D_1 - \frac{1}{c\alpha} D_2 = 0$$

și cum după (1) și (2) avem:

$$\left(-\frac{1}{a\beta}\right)\left(-\frac{1}{b\gamma}\right)\left(-\frac{1}{c\alpha}\right) = -\frac{1}{abc \cdot \alpha\beta\gamma} = -1$$

dreptele AA'', BB'', CC'' sunt concurente.

2°. Dacă două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ sunt astfel ca perpendicularele coborâte din punctele A, B, C respectiv pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ sunt concurente, atunci și perpendicularele lăsate din A', B', C' respectiv pe laturile BC, CA, AB sunt concurente. (A. E. P. No. 41),

Se știe că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se numesc ortologice.

Fie:

$$D_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad D_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

și $$D_3 = A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

ecuațiunile laturilor BC, CA, și AB ale triunghiului ABC.

Fie:

$$D'_1 = A'_1 x + B'_1 y + C'_1 = 0, \quad D'_2 = A'_2 x + B'_2 y + C'_2 = 0$$

și: $$D'_3 = A'_3 x + B'_3 y + C'_3 = 0$$

ecuațiunile laturilor $B'C'$, $C'A'$ și $A'B'$ ale trlunghiului $A'B'C'$.

Ecuațiunea unei drepte care trece prin A este:

sau: $$D_2 + \alpha D_3 = 0$$

$$(A_2 + \alpha A_3) x + (B_2 + \alpha B_3) y + C_2 + \alpha C_3 = 0.$$

Pentruca această dreaptă să fie perpendiculară pe $D'_1 = 0$ trebue ca:

$$\frac{A_2 + \alpha A_3}{B_2 + \alpha B_3} = -\frac{B'_1}{A'_1} \text{ de unde } \alpha = -\frac{A'_1 A_2 + B'_1 B_2}{A'_1 A_3 + B'_1 B_3}$$

Ecuațiunea perpendicularei din A pe $B'C'$ va fi deci:

$$D_2 - \frac{A'_1 A_2 + B'_1 B_2}{A'_1 A_3 + B'_1 B_3} D_3 = 0.$$

Ecuațiunile celorlalte două perpendiculare din B și C pe $C'A'$ și pe $A'B'$ vor fi:

$$D_3 - \frac{A'_2 A_3 + B'_2 B_3}{A'_2 A_1 + B'_2 B_1} D_1 = 0 \text{ și } D_1 - \frac{A'_3 A_1 + B'_3 B_1}{A'_3 A_2 + B'_3 B_2} D_2 = 0$$

Analog ecuațiunile perpendicularelor din A', B', C' respectiv pe BC, CA, AB vor fi:

$$D'_2 - \frac{A_1 A'_2 + B_1 B'_2}{A_1 A'_3 + B_1 B'_3} D'_3 = 0, \quad D'_3 - \frac{A_2 A'_3 + B_2 B'_3}{A_2 A'_1 + B_2 A'_1} D'_1 = 0$$

și: $$D'_1 - \frac{A_3 A'_3 + B_3 B'_1}{A_3 A'_2 + B_3 B'_2} D'_2 = 0.$$

Este evident că dacă avem:

$$\left(-\frac{A_1'A_2+B_1'B_1}{A_1'A_3+B_1'B_3}\right)\left(-\frac{A_2'A_2+B_2'B_2}{A_2'A_2+B_2'B_1}\right)\times$$
$$\left(-\frac{A_3'A_1+B_3'B_1}{A_3'A_2+B_3'B_2}\right)\equiv -1,$$

avem şi:

$$\left(-\frac{A_1A_2'+B_1B_1'}{A_1A_3'+B_1B_3'}\right)\left(-\frac{A_2A_3'+B_2B_3'}{A_2A_1'+B_2B_1'}\right)\times$$
$$\left(-\frac{A_3A_1'+B_3B_1'}{A_3A_2'+B_3B_2'}\right)\equiv -1.$$

numărătorii relaţiei prime fiind numitorii celei de a doua şi viceversa, ceiace demonstrează teorema.

ION DIMITRIU-ARAD.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Geometrie analitică
Lucrare scrisă. Anul I
6 Octombrie 1927

Se dau axele Ox, Oy, punctul A $(a, 0)$ şi se consideră cercul cu centrul în A şi cu raza $a\sqrt{2}$. Fie F un punct mobil pe acest cerc. Se cere:

1°. Ecuaţia hiperbolelor echilatere care au un focar în F şi ca directoare corespunzătoare pe Oy.

2°. Să se arate că aceste hiperbole trec prin A.

3°. Care este locul centrului acestor hiperbole.

Analiză
Lucrare scrisă. Anul I
4 Octombrie 1927

I

Să se calculeze aria comună, curbelor:

$$\begin{cases} 5x^2-y^2=1 \\ y^2=4x. \end{cases}$$

II

Să se efectueze integrala:

$$\int \frac{(x^3-4)\,dx}{(x-1)(x-3)(x-4)}$$

Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y-2}{3x+2y-11}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXIII, No. 3, Noembrie 1927. Calculul aproximativ al ariilor (urmare), de *I. Ionescu*. Aviaţia matematică, de Căpitan *I. Linteş*. Concursul „Gazetei Matematice". Premiul *„Anghel Saligny"*. Premiul *„Vasile Conta"*.

2. *Curierul Matematic*. vol. III, No. 9, Noembrie 1927. Asupra unor polinoame care formează un şir *Appel*, de *Tib. Popoviciu*.

3. *Revista de Ciencias*, ano XXX. No. 7—9, Junio á Septembre 1927. La mecanica Celeste de *Wronsky*, de *Godofredo Garcia*. La obra de Newton en Mecánica y en Astronomia, de *Valentin Gama*.

PROBLEME REZOLVATE

638. — *Să se calculeze direct derivata determinantului:*

$$\Delta=\begin{vmatrix} b^xc^x-a^{2x} & b^{2x}-a^xc^x & a^xb^x-c^{2x} \\ b^{2x}-a^xc^x & a^xb^x-c^{2x} & a^{2x}-b^xc^x \\ a^xb^x-c^{2x} & a^{2x}-b^xc^x & a^xc^x-b^{2x} \end{vmatrix}$$

POPESCU D. STELIAN

Dacă notăm:

(1) $A=a^{2x}-b^xc^x$, $B=b^{2x}-a^xc^x$, $C=c^{2x}-a^xb^x$,

determinantul dat se poate scri:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -A & B & -C \\ B & -C & A \\ -C & A & -B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B & C \\ -B & -C & -A \\ C & A & B \end{vmatrix}$$

Acum vom folosi următoarea teoremă (Eléments de la théorie des Déterminants, par *G. Dostor*, Ed. II, pag. 82).

Dacă elementele unui determinant de ordinul n sunt funcţiuni de aceiaşi variabilă x, derivata determinantului prin raport la această variabilă este egală cu suma a n determinanţi ce se obţin, înlocuind elementele fiecărei coloane sau linii prin derivatele respective a acestor elemente.

Aplicând această teoremă determinantului Δ, putem scri:

$$\Delta' = -\begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ B & C & A \\ C & A & B \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B & C \\ B' & C' & A' \\ C & A & B \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C' & A' & B' \end{vmatrix}$$

Observăm că dacă în al 2-lea determinant schimbăm coloana ultimă cu prima, apoi linia 2-a cu prima și în urmă a 2-a cu a treia obținem primul determinant, asemenea și ultimul determinant prin schimbări potrivite de linii și coloane ne dă tot primul determinant, astfel că putem scri:

$$\Delta' = -3\begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ B & C & A \\ C & A & B \end{vmatrix},$$

în care A, B, C au valorile date de (1) iar A', B', C' au valorile:

$$A' = 2a^{2x} \mathrm{L}\, a - b^x c^x \mathrm{L}\, b\, c,$$

$$B' = 2b^{2x} \mathrm{L}\, b - a^x c^x \mathrm{L}\, a\, c,$$

$$C' = 2c^{2x} \mathrm{L}\, c - a^x b^x \mathrm{L}\, a\, b.$$

Soluții date de d-nii: *Beșchea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Brânză Petru* (lic. Chișinău). *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Iancu D.* (lic. Național, Iași), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Popescu N. I.* (Cluj), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan C.* (Roman) și *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

644. — *Dacă notăm:*

$$\sqrt{a^2 - 4b} = k,$$

să se demonstreze că avem:

$$\frac{1}{(k-a)^3} - \frac{1}{(k+a)^3} = \frac{3ab - a^3}{8b^3}.$$

V. ALACI

Insemnând cu E primul membru, putem scri:

$$E = \frac{(k+a)^3 - (k-a)^3}{(k-a)^3(k+a)^3} = \frac{6k^2a + 2a^3}{(k^2 - a^2)^2}.$$

Cum din ipoteză, deducem:

$$k^2 = a^2 - 4b,$$

avem:

$$E = \frac{6a(a^2 - 4b) + 2a^3}{(a^2 - 4b - a^2)^3} = \frac{8a^3 - 24ab}{-64b^3} = \frac{3ab - a^3}{8b^3}$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Arsene Alexandru* (lic. Milit. Iași), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Balaban I. Gh,* (lic. Bârlad), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Bâjenaru Pantelie* (lic. Caracal), *Bărbulescu M. Tudor* (lic. Lazăr, București), *Bârloiu D. Nicolae* (lic. Târgoviște), *Birkenthal Alexandru* (lic. Lazăr, București), *Boncea Spiridon* (lic. Pitești), *Brânză Petru* (lic. Chișinău), *Căzămir A. Ion* (lic. Arad), *Cernăuți Iosif* (lic. Timișoara), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag. Iași), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Crăciunescu N. Eugen, Cristescu C. Ion* (lic. Lazăr, București), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focșani), *Demetrescu August, Diaconescu H. Aurel* (lic. milit., Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dinu S. D-tru* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timișoara), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Fericeanu Ștefan* (Șc Polit., Timișoara), *Floareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit. Iași), *Gheorghiev Nicolae* (lic. Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru-Haret, București), *Haim F. L.* (lic. P.-Neamț), *Hamparțum Gr.* (lic. Constanța), *Hohoi V.* (lic. Brașov), *Iancu D.* (lic. Național, Iași), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Kielburger Mihai* (Șc. Polit., Timișoara), *Leibovici R. Emil* (lic. Pitești), *Levy Jacques* (lic. Matei-Basarab, București), *Marineanu Traian* (Șc. Polit., Timișoara), *Mărculescu I. Origen* (lic. Carol, Craiova), *Mihăilescu I. Virgil* (lic. R.-Sărat). *Murăroiu Ionel* (lic. Brașov), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel. H. Nicolae* (Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Pispiris D. Gheorghe* (lic. Bârlad), *Pleșoiu I. P., Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popper Ervin,* (student, Cluj), *Popescu P. Eugen, Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popescu St. Toma* (lic. Pitești), *Popescu C. Virgiliu* (student, Târgoviște), *Popovici M.* (Focșani), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Rusmănică Ioan* (lic. Brașov), *Sabetay Andrei* (T.-Severin), *Saur A. Ioan* (lic. Arad), *Savin Arnold* (lic. Focșani), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Scarlat V. D-tru* (lic. Câmpina), *Scurtu A. Nicolae* (lic. Brașov). *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Șișu Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Slicaru C.* (lic. Național, Iași), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stan C.* (Roman), *Steblea St. Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Tătulea Dionisie, Tudose C. Tănase* (lic. Câmpina), *Vasiliu Tică* (lic. Satu-Mare), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Leoben, Austria), *Vâlceanu N. Justin* (llc. Tg.-Jiu), *Vâlsănescu Viorel* (lic. Pitești), *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu), *Weintraub Mandy* (lic. Lazăr, București), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Au mai trimes soluții, d-nii: *Bucurescu C. Ioan* (lic. Odorheiu), *Corârlan Pavel* (lic. Timișoara), *Demetrescu August* (lic. Lazăr, București), *Gârd D-tru* (Dobrotești), *Iacob St. Eugen* (Șc. Milit. de Artilerie), *Ignat M. Paul* (lic. Milit., Iași), *Ionescu Ion* (lic. Caracal), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Mocuța T. Traian* (lic. Arad), *Morțun Ar. C-tin* (Semin. Pedag., Iași), *Panaite N. Theodor, Panaitescu Ion* (lic. Milit., Craiova), *Popescu N. Ioan* (Cluj),

Popescu L. Nicolae (lic. Buzeşti, Craiova), *Procopiescu St. Nestor* (lic. Caracal) şi *Tomescu Valeriu* (lic. Lazăr, Bucureşti)

Altă soluţie. Considerăm ecuaţiunea

(1) $$x^2 + 2ax + 4b = 0,$$

cu rădăcinele:

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 - 4b},$$

şi cum:

$$\sqrt{a^2 - 4b} = k,$$

avem:

(2) $$x_1 = k - a, \quad x_2 = -(k + a).$$

Acum să formăm ecuaţia care admite ca rădăcini, inversele cuburilor rădăcinelor ecuaţiei (1), adică:

(3) $$X = \frac{1}{x^3}.$$

De aci deducem:

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{X}}$$

şi deci ecuaţia cerută este:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{X^2}} + \frac{2a}{\sqrt[3]{X}} + 4b = 0$$

sau:

$$4b\sqrt[3]{X^2} + 2a\sqrt[3]{X} + 1 = 0.$$

Să facem această ecuaţie raţională, ea se poate scri:

(4) $$4b\sqrt[3]{X^2} + 2a\sqrt[3]{X} = -1.$$

Ridicând la cub avem:

$$64b^3X^2 + 8a^3X + 24abX\left(4b\sqrt[3]{X^2} + 2a\sqrt[3]{X}\right) = -1$$

Ţinând seama de (4) avem încă:

$$64b^3X^2 + 8a^3X - 24abX + 1 = 0$$

sau:

$$64b^3X^3 + 8(a^3 - 3ab)X + 1 = 0.$$

Aceasta este ecuaţia căutată.

Scriind suma rădăcinelor acestei ecuaţiuni în funcţie de coeficienţi şi ţinând seamă de (3) şi (1), avem:

$$\frac{1}{X_1^3} + \frac{1}{X_2^3} = \frac{1}{(k-a)^3} - \frac{1}{(k+a)^3} = \frac{3ab - a^3}{8b^3}$$

Avem stabilită astfel relaţia ceruta.

647. — *Patratele a două numere pare consecutive au forma* $abcde$, $abfde$. *Se cer acele numere.*

POPESCU C VIRGILIU.

Fie $2N$ şi $2N+2$, cele două numere pare, ale căror patrate sunt de forma $abcde$, $abfde$. Observăm că:

$$(2N+2)^2 - (2N)^2 = 100(f-c)$$

$$\therefore \quad 8N + 4 = 100(f-c),$$

sau:

$$2N = 25(f-c) - 1.$$

Primul membru fiind divizibil cu 2 şi fiind de trei cifre (patratul lui fiind de cinci cifre), urmează că, $f-c$ este impar şi mai mare ca 3; $f-c$ poate fi astfel 5, 7 sau 9.

1°. Dacă luăm, $f-c=5$, atunci:

$$2N = 124, \quad 2N+2 = 126.$$

ale căror patrate sunt:

$$124^2 = 15376, \quad 126^2 = 15876.$$

Numerile 24 şi 126 satisfac enunţul.

2°. Dacă $f-c=7$, atunci:

$$2N = 174, \quad 2N+2 = 176,$$

ale căror patrate sunt:

$$174^2 = 30276, \quad 176^2 = 30976.$$

Numerile 174 şi 176 satisfac şi ele enunţul.

3°. Dacă, $f-c=9$, atunci:

$$2N = 224, \quad 2N+2 = 226,$$

ale căror patrate sunt:

$$224^2 = 50176, \quad 226^2 = 51076.$$

Vedem că aceste numere nu satisfac enunţul.

Singurele soluţii ale problemei, sunt:

124, 126 şi 174, 176.

Soluţii analoage date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Drăguţ G. Vasile* (lic.

Târgoviște), *Etinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Floareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Panaite I. Theodor* (lic. Milit. Iași), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Șc. Polit. Leoben, Austria), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Alte soluții date de d-nii: *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Craiu N. Ioan* (lic. Caransebeș), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focșani), *Demetrescu August* (lic. Lazăr, București) *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr București), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Hamparțum Grigore* (lic. Constanța), *Hohoi V.* (lic. Brașov), *Iancu D.* (lic. Național, Iași), *Iliovici Gh. C-tin* (Ploești), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Magda Ovidiu* (lic. Cluj), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Petrovici D. L.* (Câmpina), *Podariu Alexandru* (P.-Neamț), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin C. Ioan* (lic Milit., Iași), *Scarlat V. D.* (lic. Câmpina), *Sirchis Iosif* (li). Tighina), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I Aurelian* (lic. Milit., Iași) și *Vâlceanu Justin* (lic. Tg.-Jiuc

648. — *Se cere un patrat perfect a b c d astfel ca:*

$$a\,c\,d = d^3,\quad c\,d\,b = (b + d - a)^2.$$

COSNITA CEZAR

Cuburi perfecte de trei cifre, care sunt egale cu cubul cifrei unităților lor, sunt numai:

$$125 = 5^3,\quad 216 = 6^3,\quad 729 = 9^3.$$

Acum trebue să căutăm patratele de forma:

$$25\,b,\quad 16\,b,\quad 29\,b,$$

care satisfac ultima condiție; avem:

1°. $\qquad 25\,b = (b + 5 - 1)^2 = (b + 4)^2.$

Nu putem avea soluție, căci:

$$(b + 4)^2 \leqq 169.$$

2°. $\qquad 16\,b = (b + 6 - 2)^2 = (b + 4)^2,$

care e satisfăcută pentru $b = 9$.

Atunci:

$$a\,b\,c\,d = 2916 = 54^2$$

și avem o soluție a problemei:

3°. $\qquad 29\,b = (b + 9 - 2)^2 = (b + 7)^2.$

Nu putem avea soluție, căci:

$$(b + 7)^2 \leqq 256.$$

Singura soluție a problemei, este 2916,

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Aldea N.* (lic. M-rea Dealu), *Arsene Alexandru* (lic. Mițit., Iași), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Boncea N. Spiridon* (lic. Pitești), *Bordeianu Adrian* (lic. Milit., Iași), *Bucurescu Ionel* (lic. Odorheiu), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Cernăuți Iosif* (lic. Timișoara), *Cristescu C. Ion* (lic. Lazăr, București), *Dănciulescu Cr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dăscălescu St. Hristache* (lic. Focșani), *Demetrescu August* (lic. Lazăr București), *Diaconescu H. Aurel* (lic. Milit., Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Floareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Hamparțum R. Grigore* (lic. Constanța), *Hohoi Vasile* (lic. Brașov), *Iacob St. Eugen* (Șc. Milit. de Artilerie), *Iancu D.* (lic. Național, Iași), *Iliovici G. C-tin* (Ploești), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Ionescu Gh. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Marineanu I. Traian* (Șc. Polit., Timișoara), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Mocuța T. Traian* (lic. Arad), *Murăroiu Ionel* (lic. Brașov), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iași), *Panaitescu C. Ion* (lic. Milit., Craiova), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvulescu M. Ștefan* (lic. Milit., Craiova), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Pispiris D. Gh.* (lic. Bârlad), *Podariu Al.* (P.-Neamț), *Popescu E. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popescu St. Toma* (lic. Pitești), *Popescu C. Virgiliu* (Târgoviște), *Procopiescu St. Nestor* (Caracal), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Rumânică Ioan* (lic. Brașov), *Sassu V. Ioan* (lic Tg.-Mureș), *Sevin Ionel* (lic. Milit,, Iași), *Scarlat V. D.* (lic. Câmpina), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Șoimulescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați), *Tudose C. Tănase* (lic. Câmpina), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Șc. Polit. Leoben, Austria), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța) și *Zaharia O. Niculae* (lic. Constanța).

650. — *Se dau ecuațiile:*

$$x^2 + p\,x + q = 0,\quad x^2 + p_1\,x + q_1 = 0,$$

cu rădăcinele respectiv: $x_1,\ x_2;\ x',\ x''$.

Să se formeze ecuația:

$$X^4 + a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$X_1 = x_1 + x_3 + x',\quad X_2 = x_1 + x_2 + x'',$$
$$X_3 = x' + x'' + x_1,\quad X_4 = x' + x'' + x_2.$$

COSTACHESCU V. C-TIN

Relațiile dintre rădăcini și coeficienți, la primele două ecuații, sunt:

$$x_1 + x_2 = -p,\ x' + x'' = -p_1,\ x_1 x_2 = q,\ x' x'' = q_1,$$

în virtutea cărora putem scrie:

(1) $\qquad X_1 = x' - p,\quad X_2 = x'' - p,$
$\qquad\qquad X_3 = x_1 - p_2,\quad X_4 = x_2 - p_1.$

Să calculăm acum coeficienții a, b, c, d. Putem scri, ținând seama de relațiile dintre rădăcini și coeficienți și de relațiile (1):

$$-a = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = x' + x'' + x_1 + x_2 - 2p - 2p_1 = -3(p + p_1)$$

$$b = (X_1 + X_2)(X_3 + X_4) + X_1 X_2 + X_3 X_4 =$$

$$(-p_2 - 2p)(-p - 2p_1) + (x' - p)(x'' - p) +$$

$$(x_1 - p_1)(x_2 - p_1) = 5pp_1 + 2p^2 + 2p_1^2 + q_1 + pp_1 + p^2$$

$$+ q + pp_1 + p_1^2 = 3p^2 + 3p_1^2 + 7pp_1 + q + q_1$$

$$-c = X_1 X_2 (X_3 + X_4) + X_3 X_4 (X_1 + X_2) =$$

$$(x' - p)(x'' - p)(-p - 2p_1) + (x_1 - p_1)(x_2 - p_1)(-p_1 - 2p)$$

$$= (q_1 + pp_1 + p^2)(-p - 2p_1) +$$

$$(q + pp_1 + p_1^2)(-p_1 - 2p) =$$

$$-(p^3 + p_1^3 + pq_1 + p_1 q + 5p^2 p_1 + 5pp_1^2 + 2p_1 q_1 + 2pq)$$

$$d = X_1 X_2 X_3 X_4 = (x' - p)(x'' - p)(x_1 - p_1)(x_2 - p_1)$$

$$= (p^2 + pp_1 + q_1)(p_1^2 + pp_1 + q).$$

Ecuația cerută este deci:

$$X^4 + 3(p + p_1)X^3 + (3p^2 + 3p_1^2 + 7pp_1 + q + q_1)X^2$$

$$+ (p^3 + p_1^3 + pq_1 + p_1 q + 5p^2 p_1 + 5pp_1^2 + 2pq +$$

$$p_1 q_1)X + (p^2 + pp_1 + q_1)(p^2 + pp_1 + q) = 0$$

Soluții analoage date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Cernăuți Iosif* (lic. Timișoara), *Cocârlan Pavel* (lic. Timișoara), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focșani), *Crăciunescu Eugen, Dinn S. D-tru* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Dobromirescu P.* (Caracal), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Floareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Gheorghiu Nicolae, Hamparțum Grigore* (lic. Constanța), *Iacob St. Eugen* (Șc. Milit., de Artilerie), *Iancu D.* (lic. Național, Iași), *Iliovici G. C-tin* (Ploești), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Podariu Al.* (P.-Neamț), *Popescu St. Toma* (lic. Pitești), *Popescu C. Virgil* (Târgoviște), *Popovici M.* (Focșani), *Roman I. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin Arnold* (lic. Focșani), *Scarlat V. D.* (lic. Câmpina), *Șișu Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Șc. Polit., Leoben, Austria), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Altă soluție, dată de d-nii: *Popescu P. Eugen* și *Stan C.* (Roman).

Observând ca în prima soluție, că:

$X_1 = x' - p$, $X_2 = x'' - p$, $X_3 = x_1 - p_1$, $X_4 = x_2 - p_1$,

putem construi pe rând două ecuații de gradul al 2-lea, cu rădăcinele X_1, X_2, X_3, X_4.

Avem:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = -(p_1 + 2p) \\ X_1 X_2 = p^2 + pp_1 + q_1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_3 + X_4 = -(p + 2p_1) \\ X_3 X_4 = p_1^2 + pp_1 + q. \end{cases}$$

Ecuațiile de gradul al 2-lea sunt, astfel:

$$X^2 + (p_1 + 2p)X + p^2 + pp_1 + q_1 = 0$$

$$X^2 + (p + 2p_1)X + p_1^2 + pp_1 + q = 0.$$

Inmulțind aceste ecuații, avem ecuația de gr. IV cerută, anume:

$$X^4 + 3(p + p_1)X^3 + [(p + p_1)^2 + q + q_1 +$$

$$(p_1 + 2p)(p + 2p_1)]X^2 + [(p_1 + 2p)(p_1^2 + pp_1 + q)$$

$$+ (p + 2p_1)(p^2 + pp_1 + q_1)]X +$$

$$(p^2 + pp_1 + q_1)(p_1^2 + pp_1 + q) = 0,$$

Generalizare. D-l *Stan C.* (Roman), a generalizat problema. astfel:

Se dau ecuațiile:

$$x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m = 0,$$

$$x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots + q_n = 0,$$

cu rădăcinele respectiv: $x_1, x_2, \ldots x_m$; $x', x'', \ldots x^{(n)}$.

Să se formeze ecuația:

$$X^{m+n} + a_1 X^{m+n-1} + \ldots + a_{m+n} = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$X_i = \Sigma x_1 + x^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$$X_k = \Sigma x' + x_k, \quad (k = 1, 2 \ldots, m).$$

Ecuația:

$$(1) \qquad x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots + q_n = 0$$

având rădăcinele $x^{(i)}$, $(i = 1, 2, \ldots n)$, ecuația care are ca rădăcini:

$$X_i = \Sigma x_1 + x^{(i)} = -p_1 + x^{(i)},$$

se obține din (1), înlocuind pe x prin $x + p_1$, ea este:

$$(2) \quad (x + p_1)^n + q_1 (x + p_1)^{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + q_{n-1}(x + p_1) + q_n = 0$$

Asemenea ecuația:

$$(3) \qquad x^m + p \cdot x^{m-1} + \ldots + p_m = 0,$$

având rădăcinile x_k, $(k=1, 2, \ldots m)$, ecuația care are ca rădăcini:

$$X_k = \Sigma x' + x_k = -q_1 + x_k,$$

se obține din (3), înlocuind pe x prin $x + q_1$, ea este:

$$(4) \qquad (x+q_1)^m + p_1 (x+q_1)^{m-1} + \ldots + p_{m-1}(x+q_1) + p_m = 0.$$

Inmulțind ecuațiile (2) și (4), avem ecuația cerută de gradul $m+n$, anume:

$$(5) \quad [(x+p_1)^n + q_1(x+p_1)^{n-1} + \ldots + q_n][(x+q_1)^m + p_1(x+q_1)^{m-1} + \ldots + p_m] = 0.$$

In cazul particular:

$$m = n = 2, \; p_1 = p, \; p_2 = q, \; q_1 = p_1, \; q_2 = q_1,$$

ecuația (5) devine:

$$[(x+p)^2 + p_1(x+p) + q_1][(x+p_1)^2 + p(x+p_1) + q] = 0,$$

care este analoagă cu ecuațiile de gradul al 4-lea, găsite prin celelalte metode.

651. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z^3 - y^3 = 19 \\ y^5 + x^2 y^3 + (10x^2 - z^3) y^2 = x^2 z^3 - 55. \end{cases}$$

PISPIRIS D. GHEORGHE

Ultima ecuație se poate scri:

$$y^5 + x^2 y^3 - x^2 z^3 - z^3 y^2 = -10 x^2 y^2 - 55$$

$$\therefore \quad y^3(x^2 + y^2) - z^3(x^2 + y^2) = -10 x^2 y^2 - 55$$

sau:

$$(x^2 + y^2)(z^3 - y^3) = 10 x^2 y^2 + 55.$$

Această ecuație devine, în virtutea primelor două:

$$10 x^2 y^2 + 55 = 95$$

$$\therefore \quad x^2 y^2 = 4.$$

Această ecuație poate înlocui pe una din ecuațiile date, așa că putem lua în locul sistemului dat, următorul sistem echivalent:

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 y^2 = 4 \\ z^3 - y^3 = 19. \end{cases}$$

Primele două ecuații, ne permit formarea ecuației de gradul al 2-lea:

$$t^2 - 5t + 4 = 0,$$

cu rădăcinile x^2, y^2, astfel că rezolvând-o avem:

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

avem deci pentru primele două ecuații, următoarele sisteme de soluții:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1. \end{cases}$$

Din ecuația treia din (1) putem afla și valoarea lui z.

Pentru $y = 2$, ecuația a treia din (1) devine:

$$z^3 - 27 = 0$$

$$\therefore \quad (z-3)(z^2 + 3z + 9) = 0,$$

cu rădăcinile:

$$z = 3, \quad z = \frac{-3(1 \pm i\sqrt{3})}{2}.$$

Pentru $y = -2$, ecuația treia din (1) devine:

$$z^3 - 11 = 0$$

cu rădăcinele:

$$z = \sqrt[3]{11}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Pentru $y = 1$, ecuația treia din (1) devine:

$$z^3 - 20 = 0,$$

cu rădăcinele:

$$z = \sqrt[3]{20}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

In fine pentru $y = -1$, ecuația treia din (1), devine:

$$z^3 - 18 = 0,$$

cu rădăcinele:

$$z=\sqrt[3]{18}\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right),\quad i=0,\ 1,\ 2.$$

Sistemul de ecuații dat, are următoarele 12 sisteme de soluții:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=\dfrac{-3(1\pm i\sqrt{3})}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=\sqrt[3]{11}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{2k\pi}{3}\right), \quad k=0,\ 1,\ 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=\sqrt[3]{20}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{2k\pi}{3}\right), \quad k=0,\ 1,\ 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=\sqrt[3]{18}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{2k\pi}{3}\right), \quad k=0,\ 1,\ 2. \end{cases}$$

Soluții parțiale date de d-nii: *Bordeianu Adrian* (lic. Milit., Iași), *Cristescu C. Ion* (lic. Lazăr, București), *Demetrescu August* (lic. Lazăr, București), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pleșoiu I. V.*, *Popescu C. Virgiliu* (Târgoviște), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași).

PROBLEME PROPUSE

682*. — Să se găsească numărul n așa ca 9^n să se obțină scriind unul după altul două numere care diferă cu n, știind că dacă se scade 1 din fiecare din aceste numere se obțin doi multipli consecutivi ai lui n.

COL. GH. BUICLIU

683. — Produsul a patru numere dintr'o progresie aritmetică este $\frac{40}{3}$. Să se afle acele numere.

EUGEN ST. IACOB

684. — Intr'un patrulater convex $ABCD$ se ia pe latura AB un punct E. Prin E se duce o paralelă la latura CD, care taie diagonala BD în M. Prin D se duce o paralelă la AB, care tae dreapta EC în N. Să se arate că MN este paralelă cu BC.

CRISTESCU C. IOAN

685*. — Dacă într'un triunghiu dreptunghic în A se descriu cercuri cu diametre cât medianele BM și CN, atunci acele cercuri au ca ax radical simediana corespunzătoare vârfului A.

ION TH. POPOVICI

686*. — Fie A', B', C' punctele de tangență ale cercurilor (I_a), (I_b), (I_c) exînscrise triunghiului ABC cu laturile lui neprelungite. Paralelele duse din aceste puncte la bisectoarele BB'' și CC'' ale triunghiului întâlnesc laturile în punctele A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b. Să se arate că grupurile de ceviene $(AA'$, BA_b, $CA_c)$, $(AB_a$, BB', $CB_c)$, $(AC_a$, BC_b, $CC')$ sunt concurente.

N. G BOTEA

687. — Dacă avem:

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}=0,$$

avem și:

$$\frac{(x+y-z)^2+(x+z-y)^2+(y+z-x)^2}{xy+zx+yz}=-2.$$

Asemenea, dacă avem:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0,$$

avem și:

$$\frac{(x+y-z)^2+(x+z-y)^2+(y+z-x)^2}{x^2+y^2+z^2}=3.$$

CEZAR COSNITA

688*. — Să se stabilească identitatea:

$$5\cos t+3\cos 3t+\cos 5t=$$

$$2^4\cos t\left(\cos t-\cos\frac{\pi}{5}\right)^2\left(\cos t-\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2.$$

V. ALACI

Observare. La sfârșitul problemei 676* trebuie să se adauge: *pentru* $x=2$.

INFORMAȚIUNI

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

— —

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

— —

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

— —

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VII. 15 IANUARIE 1928 No. 11

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. NICOLAE I. MANOLESCU. CATEVA PROPRIETATI ALE UNOR TRIUNGHIURI.
2. NOTE MATEMATICE, 22, 23, 24.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 180, 197, 205, 304, 305, 318, 329.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
„Institut de Arte Grafice Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că începând cu anul acesta face parte din comitetul de redacție al Revistei Matematice din Timișoara și d-nul:

Dordea A. Traian, profesor de matematici la liceul din Oltenița.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunil problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-șef C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Adminstrația Revistei, și se poate proucra în schmibul prețului:

Anul I, epuizat
Anul II, broșat, 100 lei
Anul III, broșat, 100 lei
Anul IV, broșat, 100 lei
Anul V, broșat, 100 lei.
Anul VI, broșat, 100 lei.

ANUL VII — NO. 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1928

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

CATEVA PROPRIETAȚI ALE UNOR TRIUNGHIURI

de NICOLAE I. MANOLESCU
Șc. Polit. Timișoara

Fie ABC un triunghiu oarecare și O centrul cercului circumscris lui. Prin O ducem trei drepte paralele respectiv cu laturile BC, CA și AB și care tae cercul O în punctele A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2.

Construim acum triunghiurile $A_1'B_2'C_2'$ și $A_2'B_1'C_1'$ formate de dreptele lui *Simson* ale punctelor A_2, B_2, C_2; și A_2, B_1, C_1. Pentru claritatea figurii am desemnat numai aceste două triunghiuri, celelalte două perechi, $B_1''A_2''C_2''$; $B_2''A_1''C_1''$ și $C_1'''A_2'''B_2''$; $C_2'''A_1'''B_1'''$, lăsându-le nedesemnate. Demonstrațiile pe care le vom face relativ la prima pereche sunt analoage pentru celelalte două perechi.

1. *Triunghiurile formate de dreptele lui Simson ale punctelor* A_1, B_2, C_2 *și* A_2, B_1, C_1, *în raport cu cercul* O, *adică triunghiurile* $A_1'B_2'C_1'$ *și* $A_2'B_1'C_1'$ *sunt egale și razele cercurilor circumscrise lor fiind egale și date de:*

$$\varrho_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} R,$$

unde R *este raza cercului* O *și laturile date de egalitățile:*

$$A_1'C_2' = A_2'C_1' = R\sqrt{2}\sin\frac{B}{2};$$

$$A_1'B_2' = A_2'B_1' = R\sqrt{2}\sin\frac{C}{2};$$

$$B_2'C_2' = B_1'C_1' = R\sqrt{2}\cos\frac{A}{2},$$

suprafața lor comună având ca expresie:

$$supr.\ A_1'B_2'C_2' = supr.\ A_2'B_1'C_1' = R^2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

notațiile fiind cele obicinuite.

Vom da o soluție trigonometrică acestui prim punct și vom proceda precum urmează:

Unim pe A cu A_1 și A_2, pe urmă pe B cu B_1 și B_2 și pe C cu C_1 și C_2. Obținem astfel triunghiurile III'' și $I_1I_1'I_1''$.

Vom demonstra că aceste triunghiuri sunt egale între ele. Vedem, pentru aceasta, că din triunghiul ABI avem:

$$\sphericalangle IAB = \sphericalangle A_1AA_2 - \sphericalangle A - \sphericalangle CAA_2$$

și cum:

$$\sphericalangle IAB = \sphericalangle CAA_2$$

avem că:

$$\sphericalangle IAB = \frac{\sphericalangle A_1AA_2}{2} - \frac{\sphericalangle A}{2} = \frac{90^0 - A}{2}$$

de asemenea:

$$\sphericalangle IBA = \frac{90^0 - B}{2}$$

iar:

$$\sphericalangle AIB = 180^0 - 90^0 + \frac{A+B}{2} = 90^0 + \frac{A+B}{2}.$$

Făcând proporționalitatea dintre laturi și sinusuri avem:

$$\frac{IB}{\sin\frac{90^0 - A}{2}} = \frac{c}{\sin\left(90^0 + \frac{A+B}{2}\right)}$$

sau cum:

$$\sin\left[90^0 + \frac{A+B}{2}\right] = \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}$$

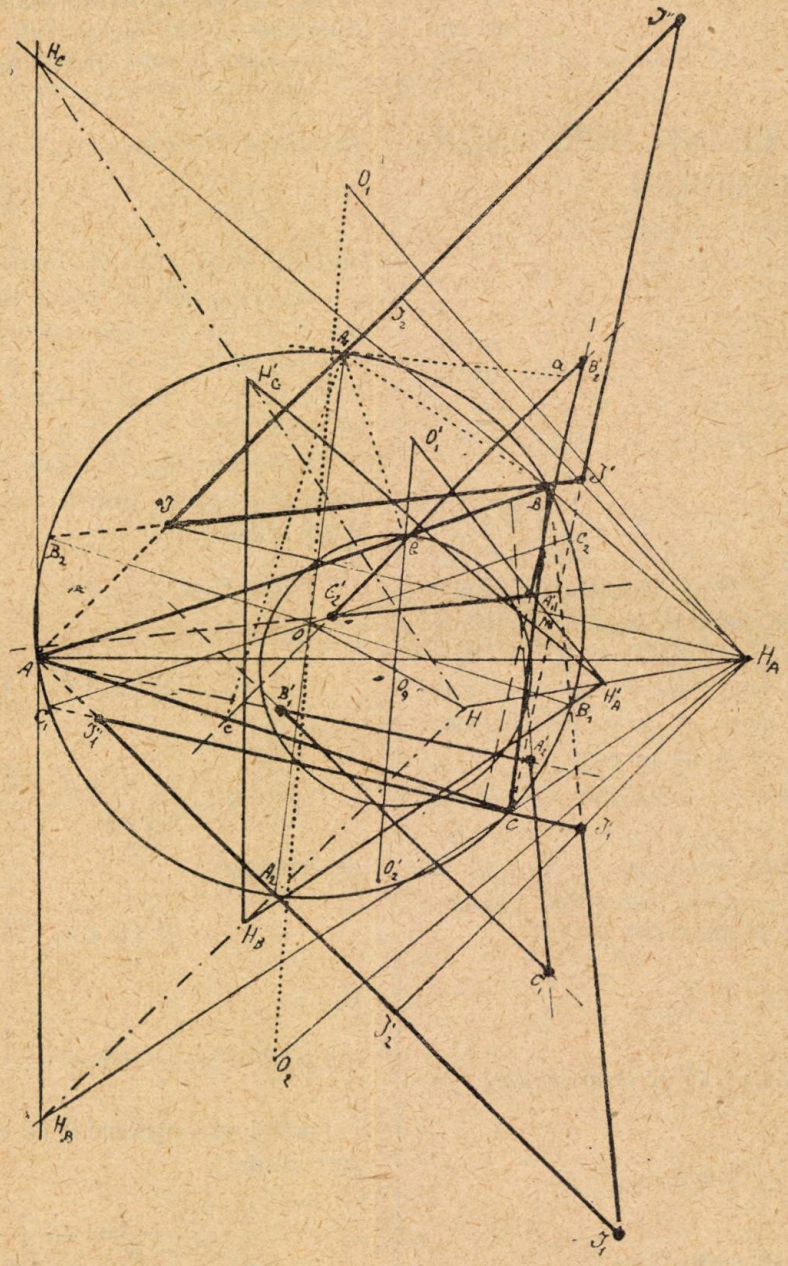
obținem:

$$(\alpha) \qquad IB = c\,\frac{\sin\frac{90^0 - A}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

In triunghiul $BI'C$ avem deasemenea:

$$\sphericalangle I'CB = \frac{90^0 - C}{2},$$

$$\sphericalangle I'BC = 180^0 - \sphericalangle B_2BC = 180^0 - \hat{B} - \frac{90^0 - B}{2}$$



sau:

$$\sphericalangle I'BC = 135^0 - \frac{B}{2}$$

și:

$$\sphericalangle BI'C = \frac{B + C}{2}$$

de unde făcând operațiile necesare găsim:

$$(\alpha') \qquad B I' = a \frac{\sin \frac{90^0 - C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Adunând pe (α) cu (α') avem:

$$II' = \frac{1}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} \left[a \sin \frac{C}{2} \sin \frac{90^0 - C}{2} + c \cos \frac{A}{2} \sin \frac{90^0 - A}{2} \right]$$

sau făcând simplificările obținem:

$$(1) \qquad II' = 2R\sqrt{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Cum însă:

$$\sphericalangle I'' I I' = \frac{90^0 - A}{2} + \frac{90^0 - B}{2} = 90^0 - \frac{A+B}{2} = \frac{C}{2}$$

și:

$$\sphericalangle II'' I' = \frac{B}{2}$$

avem:

$$\frac{II'}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{I'I''}{\sin \frac{C}{2}}$$

de unde deducem că:

$$(2) \qquad I'I'' = 2R\sqrt{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Să aflăm acum și expresia laturii omoloage din triunghiul $I_1' I_1' I_1''$.

Printr'un procedeu analog cu primul, observând că în triunghiul ACI_1'' avem:

$$\sphericalangle CA I_1'' = \frac{90^0 - A}{2}; \quad \sphericalangle A C I_1'' = \frac{90^0 - C}{2};$$

$$\sphericalangle A I_1'' C = 90^0 + \frac{A+C}{2},$$

obținem:

$$(\beta) \qquad C I_1'' = b \frac{\sin \frac{90^0 - A}{2}}{\sin \frac{B}{2}}$$

și în triunghiul BCI_1' avem:

$$(\beta') \qquad C I_1' = a \frac{\sin \frac{90^0 - B}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

de unde:

$$I_1' I_1'' = \frac{1}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}} \left[a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{90^0 - B}{2} + b \cos \frac{A}{2} \sin \frac{90^0 - A}{2} \right]$$

sau făcând simplificările:

$$(3) \qquad I_1' I_1'' = 2R\sqrt{2} \sin \frac{C}{2}$$

și:

$$(4) \qquad I_1 I_2' = 2R\sqrt{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Cum triunghiurile au și toate unghiurile egale urmează că ele sunt egale. Raza ϱ_1' a cercului circumscris fiecăruia din triunghiurile $I'II''$, $I_1' I_1' I_1''$ se deduce din raportul:

$$\varrho_1' = \frac{II'}{2 \sin \frac{B}{2}} = \frac{I_1 I'}{2 \sin \frac{B}{2}}$$

$$\therefore \quad \varrho_1' = R\sqrt{2}.$$

Acestea stabilite, pentru a dovedi că triunghiurile $A_1' B_2' C_2'$ și $A_2' B_1' C_1'$ sunt egale, vom arăta că fiecare din triunghiurile $II'I''$, $A_1' B_2' C_2'$ și $I_1 I_1' I_1''$, $A_2' B_1' C_1'$ sunt omotetice, raportul de omotetie fiind $\frac{1}{2}$ și că centrul de omotetie al ambelor perechi este ortocentrul H al triunghiului ABC.

Fie a, b, c proecțiile lui A_1 pe laturile triunghiului ABC. Se poate demonstra ușor că $AA_1 \| B_2' C_2'$.

In adevăr se vede pe figură că:

$$\sphericalangle a A_1 B = \sphericalangle a b B = \sphericalangle A b c = \sphericalangle A A_1 c$$

dar $A_1 a$ este tangentă la O_1, deci:

$$\sphericalangle a A_1 B = \sphericalangle A_1 A B$$

$$\therefore \quad A A_1 c = \sphericalangle a A_1 B = \sphericalangle A_1 A B$$

deci: $A A_1 \| B_2' C_2'$.

Deci toate laturile triunghiurilor $II'I''$ și $I_1 I_1' I_1''$ sunt paralele respectiv cu laturile triunghiurilor

$A_1' B_2' C_2'$ și $A_2' B_1' C_1'$ și cum știm de asemenea că (vezi R. M. T., An. II, No. 10. *Dreapta lui Simson de d-l Tr. Lalescu*) $B_2' C_2'$ trece prin mijlocul lui HA_1, urmează că trece și prin mijlocul lui HI adică C_2' este la jumătatea lui HI. Analog demonstrăm că $A_1' C_2'$ trece prin mijlocul lui HI. Demonstrații analoage pentru rest, deci triunghiurile $II'I''$ și $A_1' B_2' C_2'$ sunt omotetice raportul de omotetie fiind $\frac{1}{2}$ și centrul de omotetie fiind H. La fel și $I_1 I_1' I_1''$, $A_2' B_1' C_1'$ sunt omotetice în același raport și cu același centru de omotetie. Ori cum triunghiurile $II'I''$, $I_1 I_1' I_1''$ sunt egale, urmează, că avem și:

$$A_1' B_2' C_2' = A_2' B_1' C_1'.$$

Laturile acestor din urmă triunghiuri fiind de două ori mai mici decât ale primelor două vom avea:

$$A_1' B_2' = A_2' B_1' = R\sqrt{2} \sin \frac{C}{2};$$

$$B_2' C_2' = B_1' C_1' = R\sqrt{2} \cos \frac{A}{2};$$

$$C_2' A_1' = C_1' A_2' = R\sqrt{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Cunoscând laturile și unghiurile, găsim că suprafața fiecăruia din aceste triunghiuri este:

$$S_1 = R^2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

2. *Raportul dintre suprafețele triunghiurilor* ABC *și* $A_1' B_2' C_2'$ *este dat de:*

$$\frac{S}{S_1} = \frac{4 r_a}{R}.$$

In adevăr suprafața lui ABC fiind:

$$S = 2 R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

făcând raportul obținem:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{2 \sin A \sin B \sin C}{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

de unde simplificând și ținând seamă că:

$$r_a = 4 R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

avem:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{4 r_a}{R}.$$

3. *Triunghiurile* $A_1' B_2' C_2'$ *și* $A_2' B_1' C_1'$ *au același ortocentru, situat la jumătatea distanței* HH_A, H_A *fiind centrul cercului exînscris unghiului* A.

Pentru a arăta aceasta, vom demonstra că triunghiurile $II'I''$ și $I_1 I_1' I_1''$ au ortocentrul în H_A.

Ducem bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C și bisectoarea interioară unghiului A care se întâlnesc în H_A. Patrulaterul IAH_AB este inscriptibil, pentrucă:

$$\sphericalangle IAH_A = 45^0$$

din cauză că AA_1, AA_2 și AB, AC sunt izogonale. Deasemenea:

$$\sphericalangle IBH_A = \sphericalangle IBA + \sphericalangle B + \sphericalangle CBH_A =$$

$$\frac{90^0 - B}{2} + B + \frac{180^0 - B}{2}$$

sau:

$$\sphericalangle IBH_A = 135^0$$

și deci:

$$\sphericalangle IBH_A + \sphericalangle IAH_A = 180^0.$$

Din aceasta deducem imediat că avem:

$$\sphericalangle BIH_A = \sphericalangle BAH_A = \frac{A}{2}$$

și cum:

$$\sphericalangle I = \sphericalangle \frac{C}{2}$$

deducem că:

$$\sphericalangle I''IH_A = \sphericalangle \frac{A+C}{2}$$

și cum:

$$\sphericalangle I'' = \sphericalangle \frac{B}{2}$$

deducem imediat că:

$$\sphericalangle I''IH_A + \sphericalangle II''M = \sphericalangle \frac{A+B+C}{2} = 90^0$$

deci:

$$\sphericalangle IMI'' = 90^0$$

(M fiind punctul de întâlnire al dreptei $I''I'$ cu IH_A) deci IH_A este înălțimea triunghiului $I'II''$ corespunzătoare vârfului I. Demonstrații analoage ne arată că și celelalte înălțimi trec prin H_A, iar una identică pentru patrulaterul $I_1''AH_AC$ ne dă că

$$\sphericalangle H_A I_1'' C = \frac{A}{2}$$

și $I_1'' H_A \perp I_1 I_1'$. Deducem deci că triunghiurile $II'I''$ și $I_1 I_1' I_1''$ au același ortocentru H_A, evident atunci că și triunghiurile $A_1' B_2' C_2'$ și $A_2' B_1' C_1'$ au același ortocentru H_A' care este omoteticul lui H_A în raport cu H.

4. *Dreapta care unește centrele* O_1', O_2' *a cercurilor circumscrise triunghiurilor* $A_1' B_2' C_2'$ și $A_2' B_1' C_1'$ *trece prin centrul* O_9 *al cercului lui Euler al triunghiului* ABC, *iar* O_9 *este situat la mijlocul lui* $O_1' O_2'$ *a cărei lungime este dată de expresia:*

$$O_1' O_2' = \sqrt{R(R + 2r_a)}.$$

Acest lucru este ușor de demonstrat observând că $\sphericalangle O_1 H_A O_2 = 90^0$ și că triunghiul $O_1 H_A O_2$ este isoscel; O_1 și O_2 sunt centrele cercurilor $II'I''$, $I_1 I_1' I_2''$.

In adevăr triunghiurile $II'I''$; $I_1 I_1' I_1''$ fiind egale atunci și:

$$\sphericalangle O_1 H_A I_2 = \sphericalangle O_2 H_A I_2$$

Cum $H_A I_2 \perp H_A I_2'$ (ca drepte perpendiculare pe două drepte perpendiculare) rezultă că:

$$\sphericalangle I_2 H_A I_2' = 90^0$$

și dacă acestui unghiu îi adăugăm: $\sphericalangle I_2 H_A O_1$ și-i scădem pe $\sphericalangle I_2' H_A I_2$ avem că:

$$\sphericalangle O_1 H_A O_2 = 90^0.$$

De asemenea știm că într'un triunghiu ABC avem:

$$\overline{OH}^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$$

(vezi G. M., An. XXX, No. 6, pag. 213); înlocuind în această expresie unghiurile A, B, C prin acelea ale triunghiului $II'I''$ avem:

$$\overline{O_1 H_A}^2 = \overline{O_2 H_A}^2 = 2R^2 \left(1 + 8 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\right)$$

și atunci:

$$\overline{O_1 O_2}^2 = 4R^2 \left(1 + 8 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\right).$$

Fie O' mijlocul lui $O_1 O_2$, atunci avem:

$$\overline{O_1 O'}^2 = R^2 \left(1 + 8 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\right)$$

și deci:

$$\overline{O' H_A}^2 - \overline{O_1 O'}^2 = \overline{H_A O'}^2 = R^2 \left(1 + 8 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\right)$$

sau:

$$\overline{O' H_A}^2 = R^2 + 2R \cdot 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

sau:

$$\overline{O' H_A}^2 = R^2 + 2Rr_a$$

$$\therefore \overline{O' H_A} = \sqrt{R(R + 2r_a)}$$

dar și:

$$\overline{O H_A} = \sqrt{R(R + 2r_a)}$$

deci O coincide cu O' și deci cu mijlocul lui $O_1 O_2$.

Deasemenea avem:

$$O_1 O_2 = 2 O_1' O_2'$$

de unde:

$$O_1' O_2' = \frac{1}{2} 2\sqrt{R(R + 2r_a)} = \sqrt{R(R + 2r_a)}.$$

5. *Dreapta lui Euler a triunghiului* $A_1' B_2' C_2'$ *este tangentă cercului ortocentroidal al triunghiului* $A_2' B_1' C_1'$ *și invers.*

Acest lucru reiese imediat având în vedere că:

$$\sphericalangle O_1' H_A' O_2' = 90^0.$$

6. *Dacă grupăm acum alte drepte ale lui Simson, adică formăm triunghiurile făcute de dreptele lui Simson ale punctelor* B_2, C_1, A_1 *și* B_1, C_2, A_2 *și pe ale lui* C_1, A_2, B_2 *și* C_2, A_1, B_1, *obținem alte două perechi de triunghiuri, triunghiurile din fiecare pereche fiind egale între ele.*

Triunghiurile care au fost obiectul demonstrațiilor noastre erau opuse vârfului A și având ca suprafață:

$$S_1 = R^2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

cele opuse vârfului B au ca suprafață:

$$S_2 = R^2 \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

și cele opuse lui C.

$$S_3 = R^2 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Prima pereche are ca ortocentru comun punctul situat la mijlocul distanței dintre ortocentrul triunghiului A B C și centrul cercului exînscris laturii B C, a doua pereche are ortocentrul tot la jumătatea distanței, însă dintre H și centrul cercului exînscris unghiului B și a treia pereche punctul analog obținut, relativ la latura A B.

7. S_1, S_2, S_3 *având semnificațiile dela punctul 6. și* S *fiind suprafața triunghiului* ABC, *avem relațiile:*

$$(a)\qquad \frac{S}{S_1}=\frac{4r_a}{R},\quad \frac{S}{S_2}=\frac{4r_b}{R},\quad \frac{S}{S_3}=\frac{4r_c}{R}$$

$$(b)\qquad \frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_3}{S_1}=\frac{r_b}{r_a}+\frac{r_a}{r_c}+\frac{r_c}{r_b}$$

$$(c)\qquad \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}=\frac{16(4R+r)}{abc}$$

și:

$$(d)\qquad S_1+S_2+S_3=\frac{abc}{16r}.$$

Primele relații se obțin ca și la punctul 2. Cea de a doua se obține având în vedere primele relații, pe care le împărțim două câte două și avem:

$$(e)\qquad \frac{S_1}{S_2}=\frac{r_b}{r_a},\quad \frac{S_2}{S_3}=\frac{r_c}{r_b},\quad \frac{S_3}{S_1}=\frac{r_a}{r_c},$$

pe care adunându-le obținem pe (*a*). Din (*e*) mai deducem că raportul suprafețelor a două triunghiuri din două grupe diferite este invers proporțional cu raportul razelor cercurilor exînscrise corespunzătoare.

Pentru identitatea (*c*) adunăm relațiile (*a*) și împărțim ambii membrii prin S.

In fine relația (*d*) o obținem adunând valorile lui S_1, S_2, S_3 dela punctul 6, avem:

$$S_1+S_2+S_3=\frac{l}{4}R\left[4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\right.$$

$$\left.4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right]$$

și știind că:

$$4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=p-a \text{ etc.}$$

avem:

$$S_1+S_2+S_3=\frac{1}{4}Rp \quad \text{și cum} \quad R=\frac{abc}{4S}$$

avem:

$$S_1+S_2+S_3=\frac{abc}{16r}$$

8. *Toate cele șease triunghiuri au razele cercurilor circumscrise egale* și date de:

$$\varrho_1=\varrho_2=\varrho_3=\frac{1}{\sqrt{2}}R$$

iar triunghiurile dintr'o grupă au câte o latură egală *cu triunghiurile din celelalte două grupe.*

Acest lucru se vede aflând expresiile laturilor celor trei grupe de triunghiuri:

$$R\sqrt{2}\cos\frac{A}{2};\quad R\sqrt{2}\sin\frac{B}{2};\quad R\sqrt{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$R\sqrt{2}\sin\frac{A}{2};\quad R\sqrt{2}\cos\frac{B}{2};\quad R\sqrt{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$R\sqrt{2}\sin\frac{A}{2};\quad R\sqrt{2}\sin\frac{B}{2};\quad R\sqrt{2}\cos\frac{C}{2}.$$

9. *Punctul de intersecție al dreptelor lui Simson ale punctelor* C_1 *și* C_2 *și cu ortocentrele triunghiurilor* $A_1'B_2'C_2$ *și* $B_1''A_2''C_2''$ *sunt colineare și așa mai departe, adică punctul de intersecție al dreptelor lui Simson ale lui* A_1 *și* A_2 *cu* H_B'' *și* H_C' *sunt în linie dreaptă.*

In adevăr se știe că de exemplu punctul de intersecție al dreptelor lui *Simson* ale lui C_1 și C_2 se găsește pe cercul lui *Euler* al triunghiului A B C și este omologul lui C din tr. A B C și cum dreapta care unește pe H_A' cu H_B' este omoloagă bisectoarei exterioare a unghiului C, urmează că această dreaptă trebue să treacă prin intersecția celor două drepte ale lui *Simson*. Demonstrații analoage și pentru celelalte două intersecții corespunzătoare. Formăm astfel un triunghiu $H_A'H_B'H_C'$.

10. *Triunghiul* $H_A'H_B'H_C'$ *are acelaș cerc al lui Euler ca și triunghiul* A B C

In adevăr triunghiul $H'_A H'_B H'_C$ este omoteticul triunghiului format de bisectoarele exterioare ale triunghiului A B C în raport cu ortocentrul H şi cum picioarele înălţimelor acestui din urmă triunghiu $H_A H_B H_C$ sunt vârfurile triunghiului A B C, rezultă că punctele de intersecţie ale punctelor diametral opuse A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; sunt picioarele înălţimilor triunghiului $H'_A H'_B H'_C$ şi deci proprietatea este stabilită.

O consecinţă imediată a acestui punct este că *cercurile circumscrise triunghiurilor* A B C *şi* $H'_A H'_B H'_C$ *sunt egale.*

11. *Cercurile ortocentroidale ale celor şease triunghiuri* $A'_1 B'_2 C'_2$; $A'_2 B'_1 C'_1$ *etc. trec toate prin centrul cercului lui Euler al triunghiului* A B C.

Această proprietate se demonstrează observând că cele şase drepte ale lui *Euler* sunt două câte două egale şi perpendiculare formând astfel trei triunghiuri dreptunghice isoscele ale căror ipotenuze au ca mijloc chiar centrul cercului lui *Euler* al triunghiului A B C, lucru ce s'a demonstrat la punctul 4.

Tot ca o consecinţă obţinem proprietatea că: *Axele radicale ale celor şase cercuri ortocentroidale, trec prin centrul cercului lui Euler al triunghiului* A B C.

Acestea sunt câteva din proprietăţile, interesante ale acestor şase triunghiuri.

NOTE MATEMATICE

22. *Asupra problemei 647.* Problema 647 a cărei soluţie s'a publicat în numărul trecut la pagina 166 este un caz particular al problemei generale pe care am tratat-o sub titlul *„Patrate pseudogemene“*, în *Gazeta Matematică*, vol. XXXI, pag. 401. Am arătat acolo că dacă două patrate perfecte a^2, b^2 diferă prin $c\,10^{n-1}$ formula generală a numerelor a şi b este:

$$a,\ b = 2^{n-3-u} \cdot 5^{n-1-v} \cdot \frac{c}{r} \pm 2^u \cdot 5^v \cdot r$$

în care r este un număr ce nu conţine nici unul din factorii 2 şi 5, afară de aceia pe care îi conţine c.

In cazul problemei 647 cele două patrate căutate diferă prin $(f-c)100$ sau prin $k\,10^2$ în care k ia valorile 5, 7 sau 9, iar $n=3$.

Cu aceste restricţiuni problema 647 intră în cazul formulelor 6°, 7°, 10°, 11°, 13°, 14° şi 15° a tabloului dela pagina 406, *„Gazeta Matematică“*, vol. XXXI.

Făcând în acel tabel $n=3$, ceiace atrage $u=0$, găsim următoarele soluţii generale ale ecuaţiei:

$$a^2 - b^2 = 10^{3-1}\,k = 100\,k \quad (k = 5,\ 7,\ 9).$$

Cazul	Valoarea lui k	Valoarea lui r	Formulele numerelor a şi v	Relaţii între v şi n	Valorile lui v
6°	5	1	$5^{3-v} \pm 5^v$	$14v < 21$ ∴	0, 1
7°	5	5	$5^{2-v} \pm 5^{v+1}$	$14v < 7$	0
10°	7	1	$7 \cdot 5^{2-v} \pm 5^v$	$14v < 23$	0, 1
11°	7	7	$5^{2-v} \pm 7 \cdot 5^v$	$7v < 3$	0
13°	9	1	$9 \cdot 5^{2-v} \pm 5^v$	$7v < 12$	0, 1
14°	9	3	$3(5^{2-v} \pm 5^v)$	$7v < 7$	0
15°	9	9	$5^{2-v} \pm 9 \cdot 5^v$	$7v < 3$	0

Introducând în formule pe v din ultima coloană se găsesc toate soluţiile care răspund la problema cu enunţul:

„Care sunt patratele a^2 şi b^2 care diferă prin 500, 700 sau 900“ ?

Diferenţa $a^2 - b^2$	Forma lui a şi b	a^2	b^2
500	$5^3 \pm 1$	$126^2 = 15876$	$124^2 = 15376$
500	$5^2 \pm 5$	$30^2 = 900$	$20^2 = 400$
700	$7 \cdot 5^2 \pm 1$	$176^2 = 30976$	$174^2 = 30276$
700	$7 \cdot 5 \pm 5$	$40^2 = 1600$	$30^2 = 900$
700	$5^2 \pm 7$	$32^2 = 1024$	$18^2 = 324$
900	$9 \cdot 5^2 \pm 1$	$226^2 = 51076$	$224^2 = 50176$
900	$9 \cdot 5 \pm 5$	$50^2 = 2500$	$40^2 = 1600$
900	$3(5^2 \pm 1)$	$78^2 = 6084$	$72^2 = 5184$
900	$5^2 \pm 9$	$34^2 = 1156$	$16^2 = 256$

Pentru cazul restrâns al problemei 647 se vede că nu sunt decât 2 soluţii şi anume 124^2 cu 126^2 şi 176^2 cu 174^2.

COL. GH. BUICLIU

23. *Asupra unor formule.* In articolul „*Sume trigonometrice transformate în produse*“ din „R. M. T.“, No. 9, An. VII, 1927, am stabilit între alte formule și următoarele:

$$(1)\quad \cos nt = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[\cos t - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]$$

$$(2)\quad \sin nt = 2^{n-1}\sin t\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos t - \cos\frac{k\pi}{n}\right).$$

Voesc să arăt în această notă, cum aceste formule se pot deduce din niște rezultate cunoscute, dela descompunerea trinomului:

$$x^{2n} - 2rx^n\cos\alpha + r^2,$$

în factori reali de gradul al 2-lea.

Astfel este cunoscută descompunerea:

$$(3)\quad x^{2n} - 2rx^n\cos\alpha + r^2 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2r^{\frac{1}{n}}x\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + r^{\frac{2}{n}}\right),$$

care interpretată geometricește constitue teorema lui *Moivre* și *Côtes*.

(Comberousse, vol. II, ediția 3-a, p. 643). Impărțind cu $x^n r$ primul membru, vom impărți cu $x r^{\frac{1}{n}}$ fiecare factor de gradul al 2-lea din ultimul membru și obținem:

$$(4)\quad \frac{x^n}{r} - 2\cos x + \frac{r}{x^n} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x}{r^{\frac{1}{n}}} - 2\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + \frac{r^{\frac{1}{n}}}{x}\right).$$

Dacă acum facem transformarea:

$$\frac{x}{r^{\frac{1}{n}}} = e^{it},$$

deducem ușor, ținând seamă de formulele lui *Euler*:

$$\frac{x^n}{r} + \frac{r}{x^n} = e^{nit} + e^{-nit} = 2\cos nt$$

$$\frac{x}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{r^{\frac{1}{n}}}{x} = e^{it} + e^{-it} = 2\cos t,$$

și formula (4) devine, după simplificarea cu 2:

$$(5)\quad \cos nt - \cos\alpha = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos t - \cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$$

Pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$, relația (5) devine:

$$(6)\quad \cos nt = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[\cos t - \cos\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right].$$

Rămâne să arătăm încă, că:

$$(7)\quad \prod_{k=0}^{n-1}\left[\cos t - \cos\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right] = \prod_{k=0}^{n-1}\left[\cos t - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right].$$

In adevăr scriind dezvoltat, avem:

$$\left(\cos t - \cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos t - \cos\frac{5\pi}{2n}\right)\left(\cos t - \cos\frac{9\pi}{2n}\right)\cdots\left[\cos t - \cos\frac{(4n-3)\pi}{2n}\right] =$$

$$\left(\cos t - \cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos t - \cos\frac{3\pi}{2n}\right)\left(\cos t - \cos\frac{5\pi}{2n}\right)\cdots\left[\cos t - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right].$$

Simplificând factorii comuni, rămân același număr de factori în ambii membri, și atunci putem scri, factorii din primul membru rămași, scriindu-i începând cu ultimul:

$$(8)\quad \prod_{k=1}^{p}\left[\cos t - \cos\frac{(4n-4k+1)\pi}{2n}\right] = \prod_{k=1}^{p}\left[\cos t - \cos\frac{(4k-1)\pi}{2n}\right]$$

p fiind egal cu $\frac{n}{2}$ sau $\frac{n-1}{2}$, după cum n este par sau impar.

Observând că:

$$\cos\frac{(4n-4k+1)\pi}{2n} = \cos\left[2\pi - \frac{(4k-1)\pi}{2n}\right] = \cos\frac{(4k-1)\pi}{2n},$$

înseamnă că identitatea (8), deci şi (7) este adevărată.

In virtutea idenităţii (7), relaţia (6) devine:

$$\cos n t = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[\cos t - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right].$$

Am stabilit astfel relaţiunea (1).

Să stabilim acum identitatea (2). Pentru aceasta, în formula (5), înlocuim pe t prin $2t$ şi în urmă facem $\alpha = 0$, obţinem:

$$(9) \quad \cos 2nt - 1 = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[\cos 2t - \cos \frac{2k\pi}{n} \right]$$

Ţinând seamă că:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1,$$

relaţia (9) devine:

$$-2\sin^2 nt = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(2\cos^2 t - 2\cos^2 \frac{k\pi}{n} \right)$$

$$\therefore \quad \sin^2 nt = 2^{2(n-1)} \sin^2 t \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos^2 t - \cos^2 \frac{k\pi}{n} \right)$$

sau:

$$(10) \qquad \sin^2 nt = 2^{2(n-1)} \sin^2 t \times$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos t - \cos \frac{k\pi}{n} \right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos t + \cos \frac{k\pi}{n} \right).$$

Cum:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos t + \cos \frac{k\pi}{n} \right) = \left(\cos t + \cos \frac{\pi}{n} \right) \left(\cos t + \cos \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$\cdots \left[\cos t + \cos \frac{(n-1)\pi}{n} \right] =$$

$$\left[\cos t - \cos \frac{(n-1)\pi}{n} \right] \left[\cos t - \cos \frac{(n-2)\pi}{n} \right] \cdots$$

$$\left(\cos t - \cos \frac{\pi}{n} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos t - \cos \frac{k\pi}{n} \right),$$

relaţia (10) devine:

$$\sin^2 nt = 2^{2(n-1)} \sin^2 t \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos t - \cos \frac{k\pi}{n} \right)^2.$$

Extrăgând rădăcina patrată, obţinem:

$$\sin nt = 2^{n-1} \sin t \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos t - \cos \frac{k\pi}{n} \right).$$

Avem astfel dedusă şi formula (2). Remarc că formula (5) cuprinde formulele (1) şi (2) drept cazuri particulare şi putem obţine şi alte relaţii particularizând pe α.

V. ALACI

24. *Sume trigonometrice transformate în produse.*

Ca urmare a articolului cu acelaşi titlu din „R. M. T.", An. VII, No. 9, ne propunem să transformăm în produse şi alte sume trigonometrice.

1°. *Să se transforme în produs suma trigonometrică:*

$$S = 1 + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt.$$

Ne referim la articolul citat unde dacă privim prima sumă din (1) şi luăm:

$a_0 = 2, \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ şi $a = 1, \quad r = 1,$

avem suma noastră S, iar ecuaţia corespunzătoare (5) devine:

$$x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x^{n+1} + 2x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0$$

care se poate scri:

$$(x^n + 1)(x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1) = 0,$$

$$(1) \qquad \therefore \quad \frac{(x^n+1)(x^{n+1}-1)}{x-1} = 0.$$

Vom deosebi două cazuri:

a. Dacă, $n = 2p$, rădăcinele ecuaţiei (1), sunt:

$$\alpha_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2p} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2p}, \quad (k = 0, 1, \ldots 2p-1)$$

$$\alpha_{k_1} = \cos \frac{2k_1\pi}{2p+1} + i \sin \frac{2k_1\pi}{2p+1}, \quad k = 1\ 2 \ldots 2p$$

Observând că:

$$\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k} = 2\cos \frac{(2k+1)\pi}{2p}, \quad \alpha_{k_1} + \frac{1}{k_{k_1}} = 2\cos \frac{2k_1\pi}{2p+1}$$

prima din formulele (6) din articolul menţionat, devine:

$$1+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos 2pt=$$
$$2^{2p-1}\prod_{k=0}^{p-1}\left[\cos t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p}\right]\times$$
$$\prod_{k_1=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{2k_1\pi}{2p+1}\right),$$

sau:

$$(2)\qquad \sum_{\alpha=0}^{2p}\cos\alpha t=2^{2p-1}\times$$
$$\prod_{k=0}^{p-1}\left[\cos t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p}\right]\left[\cos t-\cos\frac{(2k+2)\pi}{2p+1}\right]$$

b. Dacă, $n=2p+1$, rădăcinele ecuaţiei (1) sunt:

$$\alpha_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p+1},$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2p)$$
$$\alpha_{k_1}=\cos\frac{k_1\pi}{p+1}+i\sin\frac{k_1\pi}{p+1},$$
$$(k_1=1,\ 2,\ldots 2p+1).$$

Cum:

$$\alpha_k+\frac{1}{\alpha_k}=2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1},\quad \alpha_{k_1}+\frac{1}{\alpha_{k_1}}=2\cos\frac{k_1\pi}{p+1}$$

prima din formulele (6) din articolul menţionat, devine:

$$(3)\qquad \sum_{\alpha=0}^{2p+1}\cos\alpha t=2^{2p}\prod_{k=1}^{p}\left[\cos t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1}\right]$$
$$\times\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{p+1}\right).$$

Formulele (2) şi (3) sunt acelea care transformă în produs, suma trigonometrică S.

Observare. Dacă ţinem seamă de relaţiunile (7) şi (9) din articolul menţionat, anume:

$$2^{p-1}\prod_{k=0}^{p-1}\left[\cos t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p}\right]=\cos pt$$

$$2^{p-1}\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{2p+1}\right)=$$
$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos pt,$$

relaţiunea (2) se transformă în identitatea:

$$(4)\qquad \sum_{\alpha=0}^{2p}\cos\alpha t=\cos pt\left[1+2\sum_{\alpha=1}^{p}\cos\alpha t\right].$$

2°. *Să se transforme în produse sumele trigonometrice.*

$$S_1=\cos\alpha t+\cos(\alpha+1)t+$$
$$\cos(\alpha+2)t+\ldots+\cos nt,\qquad (1\leq\alpha\leq n)$$
$$S_2=\sin\alpha t+\sin(\alpha+1)t+$$
$$\sin(\alpha+2)t+\ldots+\sin nt$$

α fiind întreg.

Ne referim tot la articolul citat unde luăm în (1):

$$a_0=a_1=\ldots=a_{\alpha-1}=0,\ a_\alpha=a_{\alpha+1}=\ldots=a_n=1$$
$$b_1=b_2=\ldots=b_{\alpha-1}=0,\ b_\alpha=b_{\alpha+1}=\ldots=b_n=1$$

şi: $\qquad a=1,\quad r=1.$

Ecuaţiile corespunzătoare (5) din articolul menţionat, devin:

$$x^{2n}+x^{2n-1}+\ldots+x^{n+\alpha}+x^{n-\alpha}+$$
$$x^{n-\alpha-1}+\ldots+x+1=0$$
$$(5)\qquad x^{2n}+x^{2n-1}+\ldots+x^{n+\alpha}-x^{n-\alpha}-$$
$$x^{n-\alpha-1}-\ldots-x-1=0.$$

Aceste ecuaţii se pot scrie:

$$(6)\qquad \frac{(x^{n+\alpha}+1)(x^{n-\alpha+1}-1)}{x-1}=0$$
$$\frac{(x^{n+\alpha}-1)(x^{n-\alpha+1}-1)}{x-1}=0.$$

Vom deosebi două cazuri:

a. Dacă $n+\alpha=2p$, deci:

$$n-\alpha+1=2p-2\alpha+1,$$

prima ecuaţie din (6) are rădăcinele:

$$\alpha_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p},$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2p-1)$$
$$\alpha_{k_1}=\cos\frac{2k_1\pi}{2p-2\alpha+1}+i\sin\frac{2k_1\pi}{2p-2\alpha+1},$$
$$(k_1=1,\ 2,\ldots 2p-2\alpha).$$

Observând că:

$$\alpha_k+\frac{1}{\alpha_k}=2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p},$$

$$\alpha_{k_1}+\frac{1}{\alpha_{k_1}}=2\cos\frac{2k_1\pi}{2p-2\alpha+1},$$

prima din formulele (6) din articolul menţionat devine:

$$(7)\quad \sum_{r=\alpha}^{2p-\alpha}\cos rt=2^{2p-\alpha-1}\prod_{k=0}^{p-1}\left[\cos t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p}\right]\times\prod_{k=1}^{p-\alpha}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{2p-2\alpha+1}\right).$$

In aceiaşi ipoteză, a doua din ecuaţiile (6), are drept rădăcini:

$$\beta_k=\cos\frac{k\pi}{p}+i\sin\frac{k\pi}{p},\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2p-1)$$

$$\beta_{k_1}=\cos\frac{2k_1\pi}{2p-2\alpha+1}+i\sin\frac{2k_1\pi}{2p-2\alpha+1},\qquad (k_1=1,\ 2,\ldots 2p-2\alpha).$$

Observând că:

$$\beta_k+\frac{1}{\beta_k}=2\cos\frac{k\pi}{p},\quad \beta_{k_1}+\frac{1}{\beta_{k_1}}=2\cos\frac{2k_1\pi}{2p-2\alpha+1}$$

a doua din formulele (6) din articolul menţionat, devine:

$$(8)\quad \sum_{r=\alpha}^{2p-\alpha}\sin rt=2^{2p-\alpha-1}\sin t\prod_{k=1}^{p-1}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{p}\right)\times\prod_{k=1}^{p-\alpha}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{2p-2\alpha+\alpha}\right).$$

b. Dacă, $n+\alpha=2p+1$, deci: $n-\alpha+1=2(p-\alpha+1)$, prima ecuaţie din (6), are drept rădăcini

$$\alpha_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p+1},\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2p)$$

$$\alpha_{k_1}=\cos\frac{k_1\pi}{p-\alpha+1}+i\sin\frac{k_1\pi}{p-\alpha+1},\qquad (k_1=1,\ 2,\ldots 2p-2\alpha+1).$$

Observând că:

$$\alpha_k+\frac{1}{\alpha_k}=2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1},$$

prima din formulele (6) din articolul menţionat, devine:

$$(9)\quad \sum_{r=\alpha}^{2p-\alpha+1}\cos rt=2^{2p-\alpha}\prod_{k=0}^{p}\left[\cos t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1}\right]\times\prod_{k=1}^{p-\alpha}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{p-\alpha+1}\right).$$

In aceiaşi ipoteză, a doua din ecuaţiile (6), are drept rădăcini:

$$\beta_k=\cos\frac{2k\pi}{2p+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2p+1},\qquad (k=1,\ 2,\ldots 2p)$$

$$\beta_{k_1}=\cos\frac{k_1\pi}{p-\alpha+1}+i\sin\frac{k_1\pi}{p-\alpha+1},\qquad (k_1=0,\ 1,\ 2,\ldots 2p-2\alpha+1).$$

Cum:

$$\beta_k+\frac{1}{\beta_k}=2\cos\frac{2k\pi}{2p+1},\quad \beta_{k_1}+\frac{1}{\beta_{k_1}}=2\cos\frac{k_1\pi}{p-\alpha+1}$$

a doua din formulele (6) din articolul menţionat, devine:

$$(10)\quad \sum_{r=\alpha}^{2p-\alpha+1}\sin rt=2^{2p-\alpha}\sin t\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{2p+1}\right)\times\prod_{k=1}^{p-\alpha}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{p-\alpha+1}\right).$$

Formulele (7), (8), (9) şi (10) sunt acelea care transformă în produse, sumele trigonometrice S_1 şi S_2.

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIII, No. 4, Decembrie 1927. Calculul aproximativ al ariilor (urmare), de *I. Ionescu*. Teorema ortopolului ca o consecinţă a unei figuri spaţiale, de *M. Nicolau*. Soluţia elementară a unei probleme de direcţie, de *Dan Barbelian*. Câteva clase de polinoame cu toate rădăcinele reale, polinoamele lui *Hermite*, de *Alexandru Niculescu*.

2. *Précis d'Analyse Mathématique*, a l'usage des candidats au certificat, de *Calcul différentiel et intégral* par *E. Lainé*, professeur a la Faculté libre des Sciences d'*Angers*.

Tome I. (226 p.) Théorie des fonctions de variables réelles. Théorie des fonctions analytiques. (30 francs).

Tome II. (316 p.) Théorie des écuations differentielles. Géométrie infinitésimale. Équations aux dérivées partielles; avec la colaboration de *G. Bouligand*, professeur a l'Université de *Poitiers*. (40 francs).

3. *Questions d'Arithmétique*, par *B. Niewenglowski*, inspecteur général honoraire de l'instruction publique (224 pagini), Cuprinde: Cap. I. Curiozități. Cap. II. Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi. Cap. III. Diviziune. Divizibilitate. Cap. IV. Divizori comuni. Multipli comuni, Cap. V. Fracțiuni. Cap. VI. Șiruri, Progresiuni. Cap. VII. Patrate, Cuburi, Rădăcini. Cap. VIII. Aplicațiuni ale teoremelor lui *Fermat* și *Wilson*. Cap. IX. Rezolvarea în numere întregi a unei ecuații *Pell*. (Ecuații de forma: $x^2 - k y^2 = 1$).

PROBLEME REZOLVATE

180. — *Să se arate că suma a trei patrate, ridicată la puterea 2^n, se poate pune sub forma unei sume de trei patrate.*

CAP. I. LINTES

Vom demonstra mai general. *Suma a n patrate, ridicată la puterea 2^n, se poate pune sub forma unei sume de n patrate.*

Vom arăta deci că:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{2^n},$$

se poate scri sub forma a n patrate. In adevăr, putem scri succesiv:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{2^n} =$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{2\binom{n-1}{2-1}} (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^2 =$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{2\binom{n-1}{2-1}} \Big[(a_1^2 - a_2^2 - a_2^2 - \ldots$$

$$\ldots - a_n^2)^2 + (2a_1a_2)^2 + (2a_1a_3)^2 + \ldots + (2a_1a_n)^2\Big] =$$

$$\Big[(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{2^{n-1}} (a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2)\Big]^2 +$$

$$\Big[2a_1a_2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\Big]^2 +$$

$$\Big[2a_1a_3(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\Big]^2 + \ldots$$

$$\ldots + \Big[2a_1a_n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\Big]^2.$$

Soluții date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan I. C.* (student), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureșfi), *Cojan D. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Dânga S. Vlad* (Șc. Polit., Timișoara), *Dimitrescu A. Mișu* (lic. Roman), *Gabri Iescu Vasile* (lic. Brăila), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *I. N. Georgescu Valeriu* (Șc. de Artilerie), *Ghaorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Klein S.* (Galați), *Măru Dumitru* (lic. Galati), *Nicolescu Isaiia* (Ploești), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Weiss Leon* (lic. Galați).

197. — *Dacă a și n reprezintă numere întregi oarecari, iar p un număr prim, să se demonstreze congruența:*

$$\sum_{i=1}^{n} a^{ip} \equiv \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} \pmod{p.}.$$

CAP. GRIGORE ZAPAN

p fiind un număr prim și oarecare, după teorema lui *Fermat*, avem:

$$a^{p-1} - 1 = \text{mult. } p,$$

de unde, deducem înmulțind cu a:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Ridicând succesiv la puterile 1, 2, 3,... n, găsim:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

$$a^{2p} \equiv a^2 \pmod{p}$$

$$a^{3p} \equiv a^3 \pmod{p}$$

. . . . .

. . . . .

$$a^{np} \equiv a^n \pmod{p}.$$

Adunând aceste egalități, observând că în membrul al 2-lea avem o progresie geometrică cu rația a, putem scri:

$$\sum_{i=1}^{n} a^{ip} \equiv a + a^2 + \ldots + a^n \equiv \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} \pmod{p}.$$

Soluții date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Antoniu I. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Atanasiu I. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (Bârlad), *Bonea Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Cazanacli Petre* (Iași), *Constantinescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Coșniță Virgil* (lic. Bârlad), *Crețoiu A.* (lic. Cantemir, București), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *Grünfeld Maximilian* (lic. Brăila), *Ionescu I. Ilie Brezuică* (lic. Caracal), *Manolescu I. N.* (lic. Focșani), *Niculescu Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Pamula Alexandru* (lic. Botoșani), *Pârvulescu Titus* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (lic. Timișoara) *Popea Gh. Ovidiu* (lic. Chișinău), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Silion Gh. Ioan* (lic. Câmpina), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Tanovici V. C-tin*,

205. — *Suma și produsul a două numere reale raționale nu pot fi întregi în același timp, decât dacă acele numere sunt ele însile întregi. Ce se întâmplă în cazul când cele două numere sunt neraționale sau imaginare?*

P. SERGESCU.

Soluție dată de autor. Fie:

$$f=\frac{p}{q},\quad g=\frac{r}{s},$$

fracții ireductibile.

Prin ipoteză, $\frac{pr}{qs}$ și $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+rq}{qs}$, sunt întregi; deci ps se divide prin q. In același mod, q se divide prin s, ceiace atrage:

$$q=s=1.$$

Rezultă că f și g sunt întregi.

Cazul când f și g sunt imaginari:

$$f=a+bi,\quad g=c+di,\quad (i=\sqrt{-1}),$$

atunci:

$$f+g=a+c+(b+d)i,\quad fg=ac-bd+(ad+bc)i$$

Cum, $f+g=$un întreg real, rezultă, $b+d=0$, atunci:

$$f=a+bi,\quad g=c-bi.$$

Ca și fg să fie întreg, mai trebue, ca:

$$ad+bc=(a-c)d=0.$$

Deci:

$$f=a+bi,\quad g=a-bi.$$

atunci:

$$f+g=2a,\quad fg=a^2+b^2$$ (a și b întregi, reali).

Soluția a 2-a dată de autor. Fie f și g cele două numere, trebue:

$$f+g=l$$
$$fg=m$$

l și m întregi, f și g sunt rădăcinele ecuației:

$$x^2-lx+m=0,$$

de unde:

$$f=\frac{l+\sqrt{l^2-4m}}{2}$$

$$g=\frac{l-\sqrt{l^2-4m}}{2}.$$

Dacă, $l^2-4m<0$, f și g sunt imaginar conjugați, ceiace am găsit și prin prima metodă.

Dacă $l^2-4m>0$ și această cantitate este patrat perfect f și g sunt întregi, fie că l e par sau impar.

Dacă $l^2-4m>0$ și această cantitate nu e patrat perfect, f și g sunt două numere incomensurabile, conjugate, de forma: $\frac{A+\sqrt{B}}{2}$, $\frac{A-\sqrt{B}}{2}$

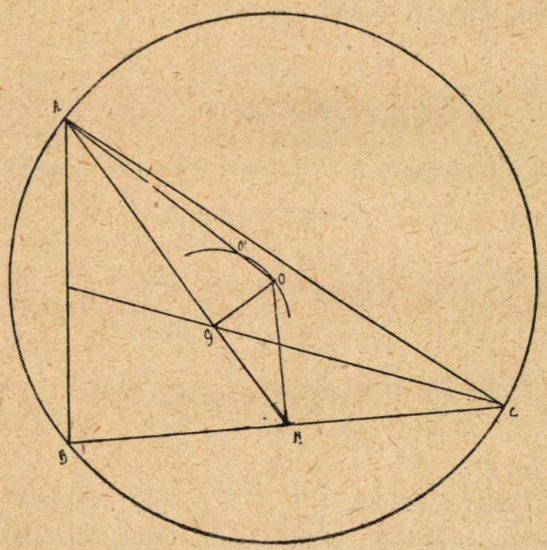
Soluții parțiale, date de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad). *Katz Pincu*, *Negretzu Florea* (lic. Pitești), *Solacolu Șerban* (lic. Matei-Basarab, București) și *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București).

304. — *Să se construiască un triunghiu cunoscând distanța* OG, *unghiul* OAG *și mediana vârfului* A, O *fiind centrul cercului circumscris*, G *punctul de intersecție al medianelor și* A *un vârf al triunghiului.*

A. BARGLAZAN

Pe mediana AM dată, luăm un punct G, astfel ca AM=2MG, avem astfel punctul de intersecție al medianelor. Din A ducem o dreaptă, care să formeze cu AM un unghiu egal cu OAG dat, pe care o tăiem în O cu un cerc descris din G, cu o rază egală cu distanța dată OG. Unind O cu M și ducând prin M o perpendiculară pe MO, avem poziția laturei opusă vârfului A, pe care

tăind-o cu un cerc din O ca centru cu O A ca rază, ne dă vârfurile B şi C. Triunghiul A B C este astfel construit.

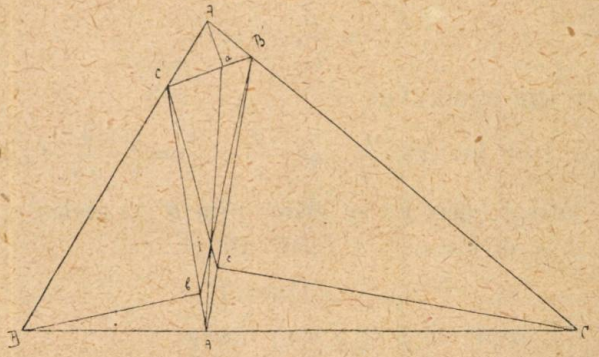


Discuţie. Fiindcă cercul cu centrul în G şi O G ca rază, poate să taie latura care cu A M face unghiul O A G, în două puncte de aceiaşi parte a lui A sau de o parte şi alta a lui A, poate să o taie într'un punct sau poate să nu o taie de loc, şi fiindcă unghiul O A G se poate lua de o parte sau alta a lui A M, rezultă că problema poate avea patru soluţii, două soluţii sau nici una.

Soluţii date de d-nii: *Agapescu G. Nicolae* (Semin. Pedag. Iaşi), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil* (student), *Berdan C.* (Bârlad), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Boju Rosetel* (lic. Timişoara), *Bosie V.* (lic. Internat, Iaşi), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braeşter I. Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Calmanovici Savu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Can'acuzino Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Cioränescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ciută G.* (Timişoara), *Comănescu Al.-Bălteni* (lic. Slatina), *Dorneanu G. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Epure Ştefan* (Buzău), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Gârleşteanu Mihail* (lic. Timişoara), *Ghelber Mauriciu* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Piteşti), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gulian Emil* (lic. Giurgiu), *Haimer Samuel* (lic. Botoşani), *Herşcovici Emanuel* (lic. Galaţi), *Iliescu M.* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Kassargian A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Katz P.* (Şc. Polit., Bucureşti), *Lăzărescu M. Vasile* (Giurgiu), *Lupan N.* (Semin. Pedag., Iaşi), *Manolescu I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Manoliu Gh.* (Semin. Pedag., Iaşi), *Marinescu Traian* (lic. Giurgiu), *Marini Paul* (student, Cluj), *Mihăilescu C. Romeo* (R.-Vâlcea), *Miresou A. Petre* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Pascu D.* (lic. Braşov), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (lic. Timişoara), *Podeanu Aurel* (Piteşti), *Popesca N. Nicul i* (student, Bucureşti), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat), Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popper Ervin* (lic. Timişoara), *Roşu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Scripcă C. Mihai* (Semin. Pedag., Iaşi), *Şerban I. Tiberiu* (lic. Braşov), *Silion Ion* (lic. Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spârchez Zeno* (lic. Braşov), *Stamatescu I. Valeriu* (Semin., Pedag, Bucureşti), *Stamatiu Mihail* (Şc. Polit., Bucureşti), *Stoenescu C. Ioan* (lic. Galaţi), *Taraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timişoara), *Vasiliu C. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Vasiliu Gh. Niculae* (lic. Focşani), *Vătăşan G. Ovid* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

305. — *Fie* A'B'C' *triunghiul ortic al triunghiului* A B C *şi a, b, c proecţiile vârfului* A, B, C *pe laturile* B'C', C'A', A'B'. *Să se demonstreze că dreptele* A'*a*, B'*b*, C'*c sunt concurente.*

G. I. DUMITRESCU.



Construim figura în condiţiile problemei şi observăm că triunghiurile C*c*A', B*b*A' sunt asemenea având:

$$\sphericalangle b = \sphericalangle c = 90^0,$$

şi unghiurile din A' egale, fiecare fiind egale cu unghiul A, căci A'C', AC sunt antiparalele şi A'B', AB sunt tot antiparalele. Din asemănarea triunghiurilor C*c*A' şi B*b*A' rezultă:

$$(1) \qquad \frac{cA'}{bA'} = \frac{Cc}{Bb},$$

Analog dovedim că şi triunghiurile C*c*B', A*a*B' sunt asemenea şi încă că triunghiurile B*b*C', A*a*C' sunt şi ele asemenea şi putem scri:

$$(2) \qquad \frac{a\,B'}{c\,B'} = \frac{A\,a}{C\,c}$$

$$(3) \qquad \frac{b\,C'}{a\,C'} = \frac{B\,b}{A\,a}.$$

Inmulţind membru cu membru egalităţile (1), (2) şi (3) obţinem:

$$(4) \qquad \frac{a\,B'}{a\,C'} \cdot \frac{b\,C'}{b\,A'} \cdot \frac{c\,A'}{c\,B'} = -1.$$

In triunghiul $A'B'C'$, observăm că dreptele $A'a$, $B'b$, $C'c$ îi împart laturile în segmente care satisfac egalitatea (4), rezultă atunci după teorema lui *Ceva*, că dreptele $A'a$, $B'b$, $C'c$ sunt concurente.

Soluţii date de d-nii: *Agapescu N. Nicolai* (Semin. Ped. Iaşi), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Berdan C.* (Bârlad), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Epure T. Ştefan* (Buzău), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Grigorescu L. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Herşcovici Emanoil* (lic. Galaţi), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Katz P.* (Şc. Polit., Bucureşti), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Manolescu I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Marinescu Traian* (lic. Giurgiu), *Morărescu Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Nestor G. D-tru* (llc. Cantemir, Bucureşti), *Pamula A. Alexandru* (lic. Botoşani) *Patroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popoviei P. Puiu* (Chişinău), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Silion Ion* (lic. Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Simionov P. Kindin* (lic. Tulcea), *Stamatiu Mihail* (Şc. Polit., Bucureşti), *Stamatescu I. Valeriu* (Sem. Pedag., Bucureşti), *Ştefănescu Emil, Stoenescu C. Ioan* (lic. Galaţi), *Şuşelescu Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Vasiliu Gh.* (lic. Timişoara), *Vasiliu C. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Vlăduţ Sabin* (lic. M-rea Dealu) şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

318. — *Să se găsească două numere întregi, pozitive astfel ca 65620 să întreacă produsul lor cu suma lor.*

EMIL STEFANESCU

Fie x şi y cele două numere, conform enunţului avem:

$$xy + x + y = 65620$$

$$(1) \qquad \therefore \quad (x+1)(y+1) = 65621.$$

Descompunând în factori primi numărul 65621, găsim:

$$65621 = 211 \times 311,$$

atunci (1) devine:

$$(x+1)(y+1) = 211 \times 311.$$

Factorii din membrul al 2-lea fiind primi, deducem de aci:

$$\begin{cases} x+1 = 211 & x+1 = 311 \\ y+1 = 311, & y+1 = 211. \end{cases}$$

Cele două numere sunt: 210, 310.

Am mai putea avea soluţia banală, 0 şi 65620.

Soluţii date de d-nii: *Adam Radu* (Constanţa), *Berdan C.* (Bârlad), *Beşchea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braieşter I. Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Budişteanu Al.* (lic. M-rea Dealu), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dimitrescu A. Mişu* (lic. Roman), *Flichştein I.* (Cernăuţi), *Georgescu I. Chiriac* (Ialomiţa), *Goldştein N.* (Şc. Polit, Timişoara), *Iliescu St. Dima* (lic. Tg.-Mureş), *Iliescu M.* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu Virgil* (lic. Tg.-Mureş), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Manoil Adolf* (Roman), *Miu M. Ion* (lic. Caracal), *Negroiu Pascu* (lic. Tg.-Mureş), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Roşu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Socaciu N.* (Şc. Polit., Timişoara), *Stănescu I. Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Stoenescu Gh.* (Tg.-Mureş), *Taraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Pavel* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti) ci *Vasiliu C. Ion.*

329. — *Să se găsească un număr astfel ca suma cifrelor sale să fie media aritmettcă a rădăcinei patrate şi cubice a răsturnatului său.*

GH. VASILIU

Răsturnatul numărului cerut, trebuind să fie simultan patrat şi cub perfect, este de forma n^6.

Pentru $n = 1$, avem $n^6 = 1$, care satisface enunţul, deci 1 este o soluţie.

Pentru $n = 2$, avem $n^6 = 64$. Cum. $4 + 6 \neq \frac{8+4}{2}$, 46 nu este soluţie.

Pentru $n = 3$, avem $n^6 = 729$. Cum, $9 + 2 + 7 = \frac{27+9}{2}$, 927 este o soluţie a problemei.

Pentru $n = 4$, avem $n^6 = 4096$. Cum, $6 + 9 + 4 < \frac{64+16}{2}$, n'avem soluţie

Asemenea pentru $n > 4$, observăm că $\frac{n^2+n^3}{2}$ $>$ ca suma cifrelor lui n^6.

Singurele soluții a problemei sunt, 1 și 927.

Soluții date de d-nii: *Beșchea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Boteă Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braieșter I. Otto* (lic. Național, Iași), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Comănescu Al. Bălteni* (lic. Slatina), *David Gheorghe* (lic. Timișoara), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Drăghiceanu Matei* (lic. Brașov), *Flickștein J.* (student, Cernăuți), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Gataianțu B. Barbu* (lic. Caracal), *Gavrilescu I.* (lic. Ploești) *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Golceo Cornel* (student, București), *Grigoré Nicolae* (Învățător, Ialomița), *Grofșoreanu I. Gheorghe*, *Herșcovici Emanoil* (Galați), *Iliescu Mircea* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Th. Bujor Andrei* (lic. Cantemir, București), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Istinie I. C. Brezuică* (lic. Caracal). *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Mitescu D. Remdeeth* (lic. Tg.-Mureș), *Neuman Maria* (Logoj), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamț), *Podeauu Aurel* (lic. Pitești). *Pop Alexandru* (student, Cluj), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Roșu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Scărlătescu Turia*, *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stamatescu I. Valeriu* (Semin. Pedag., București), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Taraș Vasile* (lic. Brașov), *Tunaru Traian* (Craiova), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Vasilescu B.* (li . Sf. Sava) și *Vulpanvici Boris* (lic. Chișinău).

PROBLEME PROPUSE

689. — Să se găsească un patrat perfect de forma $abccb$, unde $b = \frac{c}{2}$, iar prima cifră este un patrat perfect.

EUGEN ST. IACOB

690. — Să se rezolve inecuația:

$$\frac{6x^5+25x^4+46x^3+51x^2+29x-6}{4x^2+12x+9} < x^3+2x^2+5x+6.$$

COSNITA CEZAR

691. — Fiind dată ecuația:

$$\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^2+1=0,$$

care admite rădăcinele:

$$\pm\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}},\quad \pm\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}},\quad \pm\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}},$$

să se formeze ecuația ale cărei rădăcini să fie laturile triunghiului.

GH. SPRINCEANA.

692*. — Să se calculeze suma seriei:

$$S=\sum_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{2(n+2)}{(n+2)^2(n^2+4n+3)+1}$$

I. N. POPESCU-CLUJ

693*. — Fie ABC un triunghiu oarecare.

1°. Să se demonstreze că înălțimile Bb și Cc, formează cu bisectoarele unghiului A triunghiuri isoscele.

2°. Să se demonstreze că:

$$AB' \cdot nC' = AC' \cdot mB'$$

A' fiind piciorul bisectoarei din A, iar m, n și B', C' fiind intersecțiile bisectoarelor lui A cu înălțimele din B și C.

ION TH. POPOVICI

694. — Fie A punctul de întâlnire a trei ceviene dintr'un triunghiu ABC. Fie M_1, M_2, M_3 proecțiile unui punct din plan pe cele trei ceviene. Să se dovedească că punctele A, M, M_1, M_2, M_3 sunt conciclice. Cum trebue să fie cele trei ceviene astfel ca prin unirea proecțiilor punctului M, să rezulte un triunghiu asemenea cu ABC,

C-TIN V. COSTACHESCU

695*. — Două trăsuri automobile merg una după alta, în același sens, pe o șosea rectilinie. Printre ele trece la o încrucișare de drumuri o a a treia trăsură automobilă, într'un sens perpendicular celui precedent. Să se găsească condiția ca trecerea trăsurii a treia să se facă fără ciocnire. Discuție.

V. VALCOVICI

696*. — Să se stabilească identitatea:

$$\prod_{k=1}^{6}\cos\frac{2k\pi}{13}\prod_{k=1}^{5}\cos\frac{k\pi}{6}-\prod_{k=1}^{7}\cos\frac{2k\pi}{15}\prod_{k=1}^{4}\cos\frac{k\pi}{5}=\frac{1}{2048}.$$

V. ALACI

INFORMAȚIUNI

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

— —

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

— —

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

— —

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VII. 15 FEBRUARIE 1928 No. 12

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. TIB. POPOVICI. ASUPRA DESCOMPUNERII UNUI TRINOM CU COEFICIENTII RATIONALI.
2. NOTE MATEMATICE, 25, 26.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 142. 307, 323, 331, 636, 680-681, 687.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
„Institut de Arte Grafice Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că începând cu anul acesta face parte din comitetul de redacție al Revistei Matematice din Timișoara și d-nul:

Dordea A. Traian, profesor de matematici la liceul din Oltenița.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunil problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-șef C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Adminstrația Revistei, și se poate proucra în schimbul prețului:

Anul I, epuizat
Anul II, broșat, 100 lei
Anul III, broșat, 100 lei
Anul IV, broșat, 100 lei
Anul V, broșat, 100 lei.
Anul VI, broșat, 100 lei.

ANUL VII — No. 12. TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1928

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

ASUPRA DESCOMPUNERII UNUI TRINOM CU COEFICIENȚII RAȚIONALI

de TIB POPOVICI
Arad

D-l *Tr. Lalescu* într'o notă publicată în „*Gazeta Matematică*“, vol. XXI, pag. 18, își propune a determina condiția de descompunere în factori raționali a trinomului de gradul al 5-lea.

Rândurile cari urmează au de scop de a da o generalizare și o complectare a rezultatelor obținute de d-l *Lalescu*.

a, b fiind două numere întregi, să ne propunem a găsi condiția ca trinomul:

$$x^{m+n} + a x^n + b$$

să se descompună în doi factori cu coeficienții întregi, dintre cari unul de gradul al doilea.

Va trebui să avem egalitatea:

$$x^{m+n} + a x^n + b = (x^2 + \beta x + \gamma)(x^{m+n-2} + a_1 x^{m+n-3} + \ldots + a_{m+n-2})$$

β, γ, a_1, a_3, $\ldots a_{m+n-2}$ fiind numere întregi.

Egalând coeficienții, deducem:

$$(1)\quad \begin{cases} a_1 + \beta = 0 \\ a_2 + a_1\beta + \gamma = 0 \\ a_3 + a_2\beta + a_2\gamma = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m-1} + a_{m-2}\beta + a_{m-3}\gamma = 0 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} a_{m+1} + a_m\beta + a_{m-1}\gamma = 0 \\ a_{m+2} + a_{m+1}\beta + a_m\gamma = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m+n-2} + a_{m+n-3}\beta + a_{m+n-4} = 0 \\ a_{m+n-2}\beta + a_{m+n-3}\gamma = 0 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} a_m + a_{m-1}\beta + a_{m-2}\gamma = a \\ a_{m+n-2}\gamma = b. \end{cases}$$

Trebue să determinăm pe β, γ așa ca a și b să fie întregi.

Să introducem acum notația:

$$(4)\quad \Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ 1 & \beta \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\ldots \Delta_k = \begin{vmatrix} \beta & \gamma & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \beta & \gamma & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 1 & \beta & 0 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \beta \end{vmatrix}$$

Δ_k fiind un determinant de ordinul k.

Între acești determinanți avem relația de recurență:

$$(5)\quad \Delta_k = \beta\Delta_{k-1} - \gamma\Delta_{k-2}.$$

Aplicând regula lui *Cramer* se deduce din sistemul (1):

$$a_1 = -\Delta_1,\ a_2 = \Delta_2, \ldots . \alpha_k = -1)^k \Delta_k,$$

$$\ldots a_{m-1} = (-1)^{m-1}\Delta_{m-1}$$

Din sistemul (2) deducem aplicând aceiaș regulă:

$$a_{m+n-k} = (-1)^k \frac{\Delta_{k-2}}{\gamma^{k-2}} a_{m+n-2}.$$

In particular se deduce că:

$$a_{m-1} = (-1)^{m+1}\frac{\Delta_{n-1}}{\gamma^{n-1}} a_{m+n-2} = (-1)^{m-1}\Delta_{m-1},$$

deci:

$$a_{m+n-2} = (-1)^{m-n}\frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_{n-1}}\gamma^{n-1}$$

şi:

$$a_m = (-1)^n \frac{\Delta_{n-2}}{\gamma^{n-2}} (-1)^{m-n} \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_{n-1}} \gamma^{n-1}$$

$$= (-1)^m \frac{\Delta_{n-2}\Delta_{m-1}}{\Delta_{n-1}} \gamma.$$

Rezultă dar că condiţia cerută este ca numerile:

$$a = (-1)^m \left[\frac{\Delta_{n-2}\Delta_{m-1}}{\Delta_{n-1}} \gamma - \Delta_{m-1}\beta + \Delta_{m-2}\gamma \right]$$

$$b = (-1)^{m-n} \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_{n-1}} \gamma^n,$$

sau ţinând seamă de (5):

$$a = (-1)^m \left[\frac{\Delta_{n-2}\Delta_{m-1}}{\Delta_{n-1}} \gamma - \Delta_m \right]$$

$$b = (-1)^{m-n} \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_{n-1}} \gamma^n$$

să fie întregi, adică numerile:

$$(6) \qquad \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_{n-1}} \gamma^n, \quad \frac{\Delta_{n-2}\Delta_{m-1}}{\Delta_{n-1}} \gamma$$

trebue să fie întregi.

Pentru cazul general când m şi n ar fi oarecari determinarea formei generale a numerilor β, γ prezintă serioase dificultăţi. Ne vom mărgini deci la studiul câtorva cazuri particulare.

Cazul I. $m = n$.

Numerile a, b sunt întregi oricare ar fi numerile întregi β, γ. Forma lor generală este deci:

$$a = (-1)^n [\Delta_{n-2}\gamma - \Delta_n], \quad b = \gamma^n$$

De exemplu:

$$x^4 + (2\gamma - \beta^2)x^2 + \gamma^2 = (x^2 + \beta x + \gamma)(x^2 - \beta x + \gamma)$$

$$x^6 + (\beta^3 - 3\beta\gamma)x^3 + \gamma^3 =$$

$$(x^2 + \beta x + \gamma)[x^4 - \beta x^3 + (\beta^2 - \gamma)x^2 - \beta\gamma x + \gamma^2]$$

. . . . . .

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^6 + 18x^3 + 1 = (x^2 + 3x + 1)(x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 3x + 1)$$

$$x^6 - 5x^3 + 8 = (x^2 + x + 2)(x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 4)$$

Cazul II. $n = 1$.

Numerile a, b sunt iarăşi întregi oricare ar fi β, γ:

$$a = (-1)^{m-1}\Delta_m, \quad b = (-1)^{m-1}\Delta_{m-1}\gamma.$$

De exemplu:

$$x^4 + (\beta^3 - 2\beta\gamma)x + \gamma(\beta^2 - \gamma) =$$

$$(x^2 + \beta x + \gamma)(x^2 - \beta x + \beta^2 - \gamma)$$

$$x^6 + (3\beta\gamma - \beta^4 - \gamma^2)x + \gamma(2\beta\gamma - \beta^3) =$$

$$(x^2 + \beta x + \gamma)[x^3 - \beta x^2 + (\beta^2 - \gamma)x - (\beta^3 - 2\beta\gamma)]$$

. . . . . .

$$x^5 - 23x + 12 = (x^2 + 2x - 1)(x^3 - 2x^2 + 5x - 12).$$

Cazul III, $n = 2$.

Numerile (6) se scriu:

$$\frac{\Delta_{m-1}\gamma^2}{\beta}, \quad \frac{\Delta_{m-2}\gamma}{\beta}.$$

Trebue să deosebim două subcazuri:

a) m este un număr par. In acest caz Δ_{m-1}, care este un polinom în β, γ, se divide cu β, deci numerile (6) sunt întregi oricare ar fi β, γ. Forma generală a coeficienţilor a, b este:

$$(7) \qquad a = \frac{\Delta_{m-1}}{\beta}\gamma - \Delta_m$$

$$b = \frac{\Delta_{m-1}}{\beta}\gamma^2.$$

b) m este un număr impar. In acest caz Δ_{m-1} nu se divide cu β. Termenul independent de β în acest determinant este $\pm\gamma^{\frac{m-1}{2}}$ şi trebue ca $\gamma^{\frac{m+1}{2}}$ să se dividă prin β. Urmează că forma generală a numerilor a, b este tot (7) unde însă $\gamma^{\frac{m+1}{2}} = \lambda\beta$, λ fiind un număr întreg, iar semnul fiind schimbat. In particular este destul ca γ să se dividă prin β, $\gamma = \beta\lambda$ şi forma generală a lui a, b este:

$$a = -\Delta'_{m-1}\lambda + \Delta'_m$$

$$b = -\Delta'_{m-1}\beta\lambda^2$$

unde Δ'_k este determinantul Δ_k în care s'a pus $\gamma = \beta\lambda$.

Pentru cazul $m = 3$ avem condiţiile de descompunere a trinomului de gradul al 5-lea:

$$x^5 + ax^2 + b$$

studiat de d-l *Lalescu* în nota citată. Dar din rezultatele precedente rezultă că trinoamele găsite de d-l *Lalescu* nu au forma cea mai generală posibilă şi corespund cazului particular când γ se

divide prin β, ceiace am văzut că nu este o condiție necesară. E lesne de dat un exemplu numeric.

$$x^5 - 1515\,x^2 + 414 =$$
$$(x^2 - 12\,x + 6)(x^3 + 12\,x^2 + 138\,x + 69)$$

care s'a obținut făcând $\beta = -12$, $\gamma = 6$.

Cazul IV. $n = 3$.

Numerele (6) se scriu:

$$\frac{\Delta_{m-1}}{\beta^2 - \gamma}\gamma^3, \quad \frac{\Delta_{m-1}}{\beta^2 - \gamma}\beta\gamma.$$

Să punem:

$$\beta^2 - \gamma = \lambda. \quad \gamma = \beta^2 - \lambda,$$

atuncl Δ_{m-1} devine un polinom în β, λ pe care să-l notăm cu $\Delta'_{m-1}(\lambda)$. Condiția cerută este ca numerile:

$$\frac{\Delta'_{m-1}(0)\,\beta^6}{\lambda}, \quad \frac{\Delta'_{m-1}(0)\,\beta^3}{\lambda}$$

să fie întregi, este deci suficient ca:

$$\Delta'_{m-1}(0)\,\beta^3 = \lambda\,r,$$

r fiind un număr întreg.

Dar avem:

$$\Delta'_k(0) = \beta\,\Delta'_{k-1}(0) - \beta^3\,\Delta'_{k-2}(0).$$

de unde imediat:

$$\Delta'_k(0) = -\beta^3\,\Delta'_{k-3}.$$

Insă:

$$\Delta'_0(0) = 1, \quad \Delta'_1(0) = \beta, \quad \Delta'_2(0) = 0.$$

Trebue dar să deosebim două subcazuri.

(*a*) $\qquad m = 3p, \quad [\Delta'_{m-1}(0) = 0]$.

Numerile a, b sunt întregi oricare ar fi β, γ. deci forma generală a coeficienților este:

$$a = (-1)^p\left[\frac{\Delta_{3p-1}}{\beta^2 - \gamma}\beta\gamma - \Delta_{3p}\right]$$

$$b = (-1)^{p-1}\frac{\Delta_{3p-1}}{\beta^2 - \gamma}\gamma^3.$$

(*b*) $m \neq 3p$. In acest caz;

$$\Delta'_{m-1}(0) = \pm\,\beta^{m-1}$$

și deci β^{m+2} trebue să se dividă cu λ. Forma generală a coeficienților este:

$$a = (-1)^m\left[\frac{\Delta_{m-1}}{\lambda}\beta\gamma - \Delta_m\right]$$

$$b = (-1)^{m-3}\frac{\Delta_{m-1}}{\lambda}\gamma^3$$

unde întregii β, γ, λ sunt legați prin relația:

$$\lambda = \beta^2 - \gamma, \quad \beta^{m+2} = \lambda\,r.$$

r fiind un număr întreg.

Fie $m = 2$ avem trinomul de gradul 5:

(8) $\qquad x^5 + a\,x^3 + b$

unde forma generală a numerelor a, b este:

(9)
$$a = \frac{\beta^2\gamma}{\beta^2 - \gamma} - \beta^2 + \gamma$$
$$b = -\frac{\beta\gamma^2}{\beta^2 - \gamma}$$

unde trebue ca:

(10) $\qquad \beta^4 = \lambda(\beta^2 - \gamma).$

In particular dacă presupunem că β se divide cu $\beta^2 - \gamma$ avem, punând:

$$\beta^2 - \gamma = \mu, \quad \beta = \lambda\mu, \quad \gamma = \mu(\lambda^2\mu - 1)$$

formulele:

(11) $\quad a = \mu(\lambda^4\mu^2 - \lambda^2\mu - 1), \quad b = -\lambda\mu^3(\lambda^2\mu - 1)^3.$

Aceste formule constitue problema 2308 din „G. M.“, vol. XXI, p. 39, propusă de d-l *Lalescu*.

După cum se vede din analiza precedentă formulele d-lui *Lalescu* nu dau toate trinoamele (8). Iată un exemplu numeric care nu rezultă din formulele (11), ci din (9) și (10):

$$x^5 - 33\,x^3 + 648 = (x^2 + 3x - 18)(x^3 - 3x^2 - 6x - 36)$$

Cazul V. $m = p\,n$. Acest caz este o generalizare a cazului I și a cazurilor III *a)* și IV *a)*.

Considerăm sistemul:

$$\Delta_{kn-1} - \beta\,\Delta_{kn-2} + \gamma\,\Delta_{kn-3} = 0$$
$$\Delta_{kn-2} - \beta\,\Delta_{kn-3} + \gamma\,\Delta_{kn-4} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta_{kn-n+1} - \beta\,\Delta_{kn-n} + \gamma\,\Delta_{kn-n-1} = 0$$

care rezolvat ne dă:

$$\Delta_{k\,n-1}=\begin{vmatrix} 0 & -\beta & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\beta & \gamma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\gamma\Delta_{k\,n-n} & 0 & \dots & 1 & -\beta & \\ \beta\Delta_{k\,n-n}-\gamma\Delta_{k\,n-n-1} & 0 & \dots & 0 & 1 & \end{vmatrix}$$

determinantul fiind de ordinul $n-1$. Avem imediat:

$$\Delta_{k\,n-1}=(-1)^{n-1}\Delta_{k\,n-n}\begin{vmatrix} -\beta & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\beta & \gamma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -\beta \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{n-1}\gamma\Delta_{k\,n-n-1}\begin{vmatrix} -\beta & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\beta & \gamma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -\beta \end{vmatrix}.$$

Dar este lesne de văzut că determinantul de ordinul k:

$$\begin{vmatrix} -\beta & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\beta & \gamma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & & -\beta \end{vmatrix}=(-1)^k\Delta_k$$

deci:

$$(12)\quad \Delta_{k\,n-1}=\Delta_{n-1}\Delta_{k\,n-1}-\gamma\Delta_{n-2}\Delta_{k\,n-n-1}.$$

De aci rezultă că $\Delta_{k\,n-1}$ se divide cu Δ_{n-1}. Formula (12) ne arată prin inducție complectă acest fapt, dacă $\Delta_{2n-1}=M\,.\,\Delta_{n-1}$. Dar pentru $k=2$ formula se scrie:

$$\Delta_{2n-1}=\Delta_{n-1}\Delta_n-\gamma\Delta_{n-2}\Delta_{n-1}=$$

$$\Delta_{n-1}(\Delta_n-\gamma\Delta_{n-2})=M\,.\,\Delta_{n-1}.$$

Deci forma generală a numerilor întregi a, b pentru care trinomul:

$$x^{(p+1)n}+a\,x^n+b$$

are un factor rațional de gradul al doilea, este:

$$b=(-1)^{pn}\left[\frac{\Delta_{n-2}\Delta_{p\,n-1}}{\Delta_{n-1}}\gamma-\Delta_{p\,n}\right]$$

$$b=(-1)^{(p-1)n}\frac{\Delta_{p\,n-1}}{\Delta_{n-1}}\gamma^n$$

β, γ fiind numere întregi.

Intr'un viitor articol ne vom ocupa de generalizarea chestiunilor din articolul de față înlocuind trinomul printr'un polinom.

NOTE MATEMATICE

25. — *Asupra problemei No. 320, din R. M. T., vol IV, pag. 77.*

In această problemă se arată că, dacă:

$$xy+yz+zx=0$$

atunci expresiunea:

$$\frac{2x^3+2y^3+2z^3-9xyz}{(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3}$$

este independentă de x, y, z.

In nota 15, R. M. T., IV, p. 135, d-l *C. Popovici*, arată că expresia se bucură de aceiași proprietate când $x+y+z=0$.

Observ că ambele cazuri se puteau vedea deodată căci numitorul se poate scrie succesiv:

$$(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3=2x^3+2y^3+2z^3+$$

$$3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)=$$

$$2x^3+2y^3+2z^3+3(x+y+z)(xy+yz+zx)-9xyz$$

expresie egală cu numărătorul când $x+y+z=0$, sau $xy+yz+zx=0$. Această soluțiune ne poate sugera și o mică generalizare. Anume: Dacă

$$x_1+x_2+\dots+x_n=0$$

sau $\Sigma x_i x_j=0$ atunci expresia:

$$\frac{(n-1)\Sigma x_i^3-9\Sigma x_k x_j x_l}{\Sigma(x_i+x_j)^3}$$

este independentă de x_1, x_2, x_3, $\dots x_n$; i, j, k, l variind dela 1 la n, cu condiția $i\neq j\neq k\neq l$.

In adevăr numitorul se poate scrie:

$$\Sigma(x_i+x_j)^3=(n-1)\Sigma x_i^3+3\Sigma x_i^2 x_j=$$

$$(n-1)\Sigma x_i^3+3(x_1+x_2+\dots+x_n)\Sigma x_i x_j-9\Sigma x_k x_j x_l,$$

şi se vede numai decât că numărătorul şi numitorul devin egali când avem: $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$ sau $\sum x_i\, x_j = 0$.

N. G. BOTEA

26. — *Interpretarea geometrică a funcţiunilor pseudo-omogene.*

Funcţiunile pseudo-omogene constitue o clasă de funcţiuni care generalizează funcţiunile omogene şi care se bucură de proprietăţi analoage cu proprietăţile acestor funcţiuni[1]. Dintre acele proprietăţi citez numai una care ne va servi în articolul de faţă şi anume:

Dacă $F(x, y, z)$ este omogenă $F(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)$ este pseudo-omogenă[2]. Să dăm acum interpretarea geometrică care provine din proprietatea ei de omogeneitate, anume: reprezintă o curbă degenerată într'un fascicol de drepte a căror număr este egal cu gradul acelei funcţiuni. Pentru funcţiunile pseudo-omogene vom căuta să formăm cea mai generală funcţie pseudo-omogenă de 2 variabile transformarea $X=x^\alpha$, $Y=y^\beta$. (I) şi să vedem apoi ce devine:

$$F(x, y)=a_0 y^m+a_1 y^{m-1} x+a_2 y^{m-2} x^2+a_3 y^{m-3} a^3\ldots$$
$$+a_n x^n=(y+m_1 x)(y+m_2 x)\ldots(y+m_n x)$$

unde $m_1, m_2, \ldots m_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$F(1, t)=0$$

Funcţiunea pseudo-omogenă care corespunde transformărei (1) este:

$$F(x^\alpha, y^\beta)=a_0 y^{\beta m}+a_1 y^{\beta(m-1)} x^\alpha+a_2 y^{\beta(m-2)} x^{2\alpha}+\ldots$$
$$\ldots+a_n x^{m\alpha}=(y^\beta+m_1 x^\alpha)\ldots(y^\beta+m_m x^\alpha).$$

Deci funcţiunea pseudo-omogenă sa descompus în curbe de forma:

$$y^\beta+m_i x^\alpha=0 \quad i=1\,.\,2\ldots m,$$

dacă α şi β sunt de acelaş semn, dacă însă unul din exponenţi e de forma $-\beta$ atunci curbele sunt de forma $x^\alpha y^\beta=m$. Primele reprezintă parabole şi celelalte iperbole.

1) Vezi articolul d-lui Prof. V. Alaci, R. M. T., No. 1, anul II.

2) Nota d-lui Prof. V. Alaci, R. M. T., No. 1, anul III

Înţelegând, bine-înţeles, prin parabole nu acele conici ale căror ecuaţiuni reduse sunt $y^2=ax$, ci orice curbă a cărei ecuaţie este de forma $y^p=ax^q$, tot aşa şi pentru iberbole.

Deci: orice funcţie pseudo-omogenă se descompune în parabole sau iberbole după cum α şi β sunt de acelaş semn, sau de semne contrarii.

In cazul funcţiilor de 3 variabile chestiunea e mai complicată de oarece o funcţie omogenă nu se mai descompune în funcţii lineare ci reprezintă o suprafaţă conică cu vârful în origină. Să începem cu cazul particular când funcţia se descompune în forme lineare adică:

$$F(x, y, z)=(x+a_1 y+b_1 z)(x+a_2 y+b_2 z)(x+$$
$$a_2 y+b_3 z)\ldots(x+a_n y+b_n z).$$

Funcţia pseudo-omogenă corespunzătoare este:

$$F(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)=(x^\alpha+a_1 y^\beta+b_1 z^\gamma)(x^\alpha+a_2 y^\beta+b_2 z^\gamma)\ldots$$
$$\ldots(x^\alpha+a_n y^\beta+b_n z^\gamma).$$

Suprafaţa $F(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)=0$ se descompune în suprafeţele $x^\alpha+a_i y^\beta+b_i z^\gamma=0$, $i=1\,.\,2\ldots n$.

Pentru			Felul suprafeţelor
$\alpha>0$	$\beta>0$	$\gamma>0$	$x^\alpha+a y^\beta+b z^\gamma=0$
$\alpha>0$	$\beta<0$	$\gamma<0$	$x^\alpha y^\beta z^\gamma+a z^\gamma+b y^\beta=0$
$\alpha>0$	$\beta>0$	$\gamma<0$	$x^\alpha z^\gamma+a y^\beta z^\gamma+b=0$
$\alpha<0$	$\beta<0$	$\gamma<0$	$y^\beta z^\gamma+a x^\alpha z^\gamma+b x^\alpha y^\beta=0$

Dintre suprafeţele $x^\alpha+a y^\beta+b z^\gamma=0$ cea mai simplă şi care se poate lua ca suprafaţă tip este:

$$x^3+a y^2+b z=0.$$

Pentru suprafeţele	Putem lua
$x^\alpha y^\beta z^\gamma+a z^\gamma+b y^\beta=0$	$x y z+b y+a z=0$
$x^\alpha z^\gamma+a y^\beta z^\gamma+b=0$	$x z+a y z+b=0$
$y^\beta z^\gamma+a x^\alpha z^\gamma+b y^\beta x^\alpha=0$	$y z+a x z+b y z=0$

Prima reprezintă un paraboloid cubic, a doua un iperboloid cubic, a treia un cilindru iperbolic şi a patra un con cu vârful în origină. Aceasta este interpretarea geometrică în cazul când funcţia omogenă se descompune în forme lineare.

Ar urma acum să studiem cazul când funcţiunile omogene se descompun în factori de gr. II, III etc., un studiu complect ar fi astfel imposibil. De aceia considerăm ecuaţia generală a suprafeţelor conice cu vârful în origină. Vor fi reprezentate printr'o ecuaţie omogenă $F(x, y, z)=0$ care poate să se descompună în alte funcţii omogene, adică:

$$F(x, y, z)=f_1(x, y, z).f_2(x, y, z)\ldots f_n(x, y, z).$$

Funcţiunile $f(x.y.z)=0$ fiind şi ele omogene, deci reprezentând suprafeţe tot conice.

Când facem transformarea: $x=x^\alpha$, $y=y^\beta$, $z=z^\gamma$ (II) avem:

$$F(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)=f_1(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)f_2(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)\ldots$$
$$\ldots f_n(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)=0.$$

Să vedem ce reprezintă suprafeţele:

$$f(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)=0.$$

Suprafaţa $f(x, y, z)=0$ reprezintă o suprafaţă conică generată de o dreaptă ale cărei ecuaţii sunt:

$$x=a\,z \qquad y=b\,z,$$

la care se adaugă o condiţie $\varphi(a\,b)=0$, exprimând că dreapta este pe suprafaţă.

Dacă facem transformările (II) asupra ecuaţiilor generatoarei avem:

$$x^\alpha=a\,z^\gamma,\ y^\beta=b\,z^\gamma,$$

cu condiţia $\varphi(a, b)=0$.

Pentru	Ecuaţiile generatoarei
$\alpha>0\ \beta>0\ \gamma>0$	$x^\alpha=a\,z^\gamma \quad y^\beta=b\,z^\gamma$
$\alpha>0\ \beta>0\ \gamma<0$	$x^\beta\,z^\gamma=a \quad y^\beta\,z^\gamma=b$
$\alpha>0\ \beta<0\ \gamma<0$	$x^\alpha\,z^\gamma=a \quad z^\gamma=b\,y^\beta$
$\alpha<0\ \beta<0\ \gamma<0$	$z^\gamma=a\,x^\alpha \quad z^\gamma=b\,y^\beta$

In primul şi ultimul caz avem cilindri parabolici cu generatoarele paralele la $0z$. In al doilea caz 2 cilindri iperbolici. In al treilea un cilindru iperbolic şi unul parabolic.

Deci: O funcţie pseudo-omogenă de 3 variabile reprezintă un număr oarecare de suprafeţe generate de o curbă strâmbă, ce trece prin 0 şi se găseşte la intersecţia a 2 cilindri a căror natură variază după semnele cantităţilor, α, β, γ.

EMIL MORTUN
Stud. în Mat., Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIII, No. 5, Ianuarie 1928. O teoremă de algebră, de *D. V. Ionescu*, Asupra indicatorilor, de Căpitan *I. Linteş*. O chestiune de geometrie analitică, de *Ing.-Şef M. Nicolau*.

2. *Curierul Matematic*. vol. III, No. 10, Ianuarie 1928. Drumuri nouă, Comitetul. Asupra unei probleme de algebră de *Tiberiu Popoviciu*. Teoreme din geometria triunghiului, de *N. Botea*.

3. *Revista Matematică din Galaţi*, anul III No. 9, Ianuarie 1928. Proprietăţi ale triunghiului în legătură cu ortocentrul său, de *N. Blaha*. Calculul a două integrale, de *C. N. Drâmbă*.

Regulamentul unui premiu anual, *Comitetul*. Premiile anului 1928, *Comisiunea*.

PROBLEME REZOLVATE

142. — *Să se găsească un număr, ştiind că suma numerilor prime cu el şi inferioare lui este 471744.*

I. N. GEORGESCU-VALERIU.

Soluţii date de d-nii: *Gheorghiu T. Gheorghe* (lic. Galaţi) şi *Popp Alexandru* (Cluj).

Fie N numărul căutat, descompus în factori primi fiind de forma:

$$N=a^\alpha b^\beta c^\gamma,\ldots l^\delta.$$

Atunci, suma numerilor prime inferioare lui N, ştim că este:

$$\varphi(N)=a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}..l^{\delta-1}(a-1)(b-1)(c-1)..(l-1).$$

Pe de altă parte:

$$\varphi(N)=471744=2^6\times3^4\times7\times13.$$

Rezultă, deci:

$$a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\ldots l^{\delta-1}(a-1)(b-1)(c-1)\ldots(\delta-1)$$
$$=2^6\times3^4\times7\times13.$$

Cum 2, 3, 7, 13 sunt factori primi ai lui N, rezultă:

$$2^{\alpha-1}\times3^{\beta-1}\times7^{\gamma-1}\times13^{\delta-1}(2-1)(3-1)(7-1)(13-1)$$
$$=2^6\times3^4\times7\times13$$

$\therefore$

$$2^{\alpha-1}+3^{\beta-1}\times7^{\gamma-1}\times13^{\delta-1}=2^6\times3^4\times7\times13.$$

sau:

$$2^{\alpha-1}\times 3^{\beta-1}\times 7^{\gamma-1}\times 13^{\delta-1}=2^6\times 3^4\times 7\times 13.$$

Din identificare, deducem:

$$\alpha=3,\ \beta=3,\ \gamma=2,\ \delta=2,$$

Numărul cerut este deci:

$$N=2^3\times 3^3\times 7^2\times 13^2=1788696.$$

Observare. S'au primit multe soluții greșite.

307. — *Să se calculeze valoarea expresiunei:*

$$E=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^2}+\sqrt{\frac{1}{2^4}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{2\,2^{n+2}-1}}}}},$$

când numărul radicalelor suprapuse este infinit.

DILI C. SCHILERU

Soluția autorului. Dacă a este un arc din primul cadran, atunci putem scri:

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},\quad \cos\frac{a}{2^2}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{a}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}},\quad \cos\frac{a}{2^3}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{a}{2^2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^2}+\sqrt{\frac{1+\cos a}{2^3}}}}$$

$$\cos\frac{a}{2^{n+2}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^3}+\sqrt{\frac{1}{2^4}+\ldots+\sqrt{\frac{1+\cos a}{2^{2^{n-2}}-1}}}}}=E.$$

Observând că pentru $a=\frac{\pi}{2}$:

$$\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \text{iar}\quad \lim_{n=\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+3}}=1,$$

găsim că:

$$\lim_{n=\infty}E=1$$

Observare. D-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Grofșoreanu I. Gheorghe*, *Herșcovici Emanoil* (lic. Galați), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Percea Viorel* (lic. Timișoara), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Rădulet B. Remus* (Șc. Polit., Timișoara), *Simionescu G.* (lic. M-rea Dealu), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), scriu expresiunea dată sub forma evidentă

$$E=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

In Culegere de Probleme, Cap. XX, se arată că limita expresiunei:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}},$$

când numărul radicalelor este infinit, este:

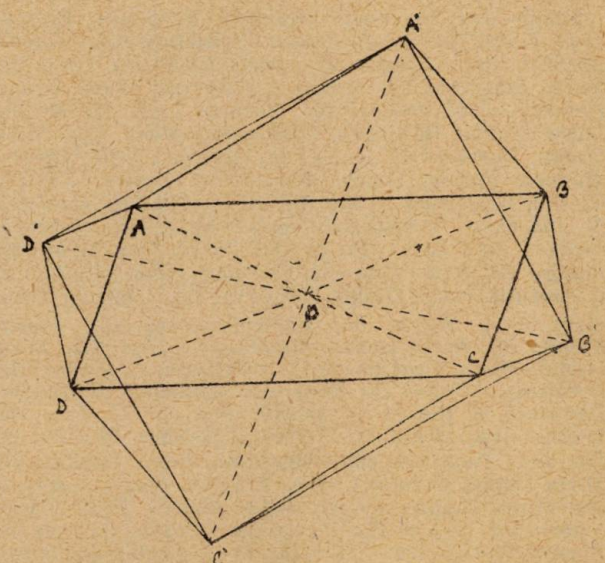
$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a}).$$

In cazul nostru, avem:

$$\lim_{n=\infty}E=\frac{1}{4}(1+\sqrt{1+8})=1.$$

323. — *Se consideră paralelogramul* ABCD. *Pe laturile* AB, BC, CD, DA *se construesc în exteriorul paralelogramului, triunghirile asemenea* AA'B BB'C CC'D, DD'A, *având aceiași orientare în plan. Se cere: 1°. Să se demonstreze că dreptele* A'C', B'D', *se întâlnesc în centrul paralelogramului* ABCD. *2°. Să se arate că figura* A'B'C'D' *este paralelogram.*

GH. I DUMITRESCU



Fie ABCD paralelogramul dat, P centrul paralelogramului, adică punctul de întâlnire al diagonalelor lui și AA'B, BB'C, CC'D, DD'A triunghiuri

asemenea, având aceiași orientare, construite pe laturile paralelogramului dat.

1°. Triunghiurile asemenea A A'B, C C'D având câte o latură paralelă (AB || DC), sunt omotetice, și atunci dreptele care unesc vârfurile omoloage, sunt concurente, rezultă deci că A'C' trece prin punctul P, centrul parlalelogramului:

Pentru motive analoage, triunghiurile BB'C, DD'A, sunt omotetice, deci B'D' trece prin același punct P.

2°. Raportul de omotetie al triunghiurilor AA'B CC'D și BB'C, DD'A fiind egal cu — 1, rezultă că $PA' = PC'$, $PB' = PD'$ și atunci evident că patrulaterul A'B'C'D' ale cărui diagonale se taie în părți egale, este un paralelogram.

Observare. Nu-i nevoie ca toate triunghiurile AA'B, BB'C, CC'D, DD'A să fie asemenea între ele, ci e suficient ca AA'B să fie asemenea cu CC'D și BB'C să fie asemenea cu DD'A.

Generalizare. Dacă am avea un poligon regulat cu un număr par de laturi și pe fiecare două laturi paralele, am construi exterior s'au interior niște poligoane asemenea dreptele care unesc vârfurile omoloage, trec prin centru poligonului. Demonstrația este identică ca mai sus.

Soluții date de d-nii: *Ardelean Radu* (lic. Brașov), *Beju Traian* (lic. Arad), *Berdan C.* (Bârlad), *Bosie Valeriu*, *Botea N.* (lic. Cantemir, București), *Căldăraru Leon* (lic. Sincai, București), *Ciorănescu I. Ctin* (lic. M-rea Dealu), *Comănescu Al. Bălteni* (lic. Slatina), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Ghelber Mauriciu* (Semin. Pedag., București), *Grigore T. V.* (lic. Tg-Jiu), *Grigorescu L. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Goldștein N.* (Șc. Polit. Timișoara), *Grofșorean I. G.*, *Herșcovici Emanoil* (lic. Galați), *Iliescu Șt. Virgil* (lic. Tg-Mureș), *Ionescu Th. Bujor Ctin* (lic. Cantemir, București), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Jojea Paul* (lic. Cantemir, București), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu I. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Marini Paul* (student), *Mihăilescu I. Romeo* (lic. R-Vâlcea), *Nestor G. Dtru* (lic. Cantemir, București), *Patroianu M.* (lic. M-rea Dealu), *Pop vici C. Ctin* (lic. Internat Iași), *Popovici P. Puiu* (Chișinău), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popp Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Purdilă C.* (lic. Brașov), *Roșu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iași), *Șerbănescu Ovidiu* (lic. Constanța), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stamatescu I. Valeriu* (Semin. Pedag., București), *Ștefulescu I. Ghica* (Timișoara), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu N. Dtru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București) și *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

331. — *Să se descompună numărul 1025 într'o sumă de patru patrate. Să se generalizeze.*

M. GHERMANESCU.

Observând că:

$$1025 = 1 + 1024 = 1 + 4 \times 4^4,$$

vom demonstra în general, că numerile de forma:

$$N = 1 + 4\,a^4,$$

se pot descompune într'o sumă de patru patrate perfecte, putem scri succesiv:

$$1 + 4\,a^4 = 1 + 4\,a^2 + 4\,a^4 - 4\,a^2$$
$$= (1 + 2\,a^2)^2 - (2\,a)^2 = (1 + 2\,a + 2\,a^2)^2$$
$$(1 - 2\,a + 2\,a^2) = [(1 + a)^2 + a^2][1 - a)^2 + a^2]$$

Deci; $N = (1 - a^2)^2 + [a\,(1 - a)]^2$
$+ [a\,(1 + a)]^2 + (a^2)^2$

Pentru $a = 4$, avem:

$$1025 = 15^2 + 12^2 + 20^2 + 16^2$$

Observare. Mai general observăm identitatea din „C de P" p. 412

$$x^4 + 4\,y^4 = (x^2 - y^2)^2 + (y^2 + x\,y)^2$$
$$+ (y^2 - x\,y)^2 + (y^2)^2.$$

Altă generalizare. Vom arăta încă numerile de forma

$$1\,\underbrace{00\ldots0}_{2p+1}\,25,$$

se pot descompune într'o sumă de patru patrate perfecte.

In adevăr:

$$1\,\underbrace{00\ldots0}_{2p+1}\,25 = 1\,\underbrace{00\ldots0}_{2p+3} + 25$$
$$= (3\,\underbrace{00\ldots0}_{p+1})^2 + 1\,\underbrace{00\ldots0}_{p+1})^2 + 4^2 + 3^2$$

Pentru $p = 0$, avem:

$$1025 = 30^2 + 10^2 + 4^2 + 3^2$$

Prima soluție și generalizare, date de d-nii: *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Căldăraru Leon* (București), *Georgescu N. Valeriu*, *Grubenmann Ionel* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th.*, *Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th.*, *Bujor Ctin* (lic. Cantemir, București), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București).

Soluția și generalizarea a 2-a, dată de d-nii: *Ciorănescu I. Ctin* (lic. M-rea Dealu), *Diaconu Gh.* (Amărești), *Gradiny I. Gheorghe*, *Grofșoreanu I. Gheorghe*, *Herșcovici Emanoil* (Galați), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Lepădatu Miclea* (lic. Cahul), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Mihailescu Romeo* (R-Vâlcea), *Neuman Maria* (Lugoj), *Podariu Al.* (lic. Piatra-Neamț), *Podeanu Aurel* (lic. Pitești), *Popescu Dem. M.*, *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Șocaciu Nicolae* (Șc. Polit. Timișoara), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

Soluții, fără generalizare, date de d-nii: *Boroș P. Dan* (lic. Internat, Iași), *Braiester I. Otto* (lic. Național, Iași), *Chiru O. Nanov* (lic. Internat, Iași), *Constantinescu G. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Gavrilescu N. I.* (lic. Ploești), *Gârlesteanu Mihail* (Timișoara), *Ghelber Mauriciu* (Semin. Pedag., București), *Grozăvescu Dumitru* (lic. Buzești, Craiova), *Grozăvescu Gr. Petre* (lic. Buzești, Craiova), *Hulubei Telemac, Katz Lăzăr, Marinescu S. D.* (Ploești), *Micu M. Ion* (lic. Caracal), *Nestor G. Dtru* (lic. Cantemir, București), *Percea Viorel* (lic. Timișoara), *Petrescu N. Dtru* (București), *Purdilă Ctin* (lic. Brașov), *Raiciu V. Ctin* (lic. Carol, Craiova), *Roșu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Schächter M. Osias* (Galați), *Stamatescu I. Valeriu* (Semin. Pedag., București), *Stoicescu Th.* (lic. Internat, Iași), *Vulpanovici Boriș* (lic. Chișănău) și *Zamfir D. Ilie* (lic. Caracal).

636. — *Dacă $p > q$, se cere să se rezolve ecuația:*

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^n]{x^p+q}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^{n-1}]{x^p+q}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^{n-2}]{x^p+q}}+\ldots+\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^2]{x^p+q}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^p+q}}+\frac{x^p+x^q}{x^p+q}}}}}}=0,$$

numărul radicalelor fiind n.

IANCULESCU OCTVIAN

Observând că:

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^p+q}}+\frac{x^p+x^q}{x^p+q}}=\frac{1}{\sqrt{x^p}}+\frac{1}{\sqrt{x^q}},$$

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^2]{x^p+q}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^p+q}}+\frac{x^p+x^q}{x^p+q}}}=\frac{1}{\sqrt[2^2]{x^p}}+\frac{1}{\sqrt[2^2]{x^p}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^3]{x^p+q}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^2]{x^p+q}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^p+q}}+\frac{x^p+x^q}{x^p+q}}}}=\frac{1}{\sqrt[2^3]{x^p}}+\frac{1}{\sqrt[2^3]{x^q}}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^n]{x^p+q}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^{n-1}]{x^p+q}}+\ldots+\sqrt{\frac{2}{\sqrt[2^2]{x^p+q}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^p+q}}+\frac{x^p+x^q}{x^p+q}}}}}=\frac{1}{\sqrt[2^n]{x^p}}+\frac{1}{\sqrt[2^n]{x^q}},$$

ecuația propusă poate fi pusă sub forma:

$$\frac{1}{\sqrt[2^n]{x^p}}+\frac{1}{\sqrt[2^n]{x^q}}=0,$$

sau:

$$\sqrt[2^n]{x^q}=-\sqrt[2^n]{x^p},$$

Ridicând la puterea 2^n, ambele părți, avem:

$$x^q=x^p$$

sau:

$$x^{p-q}=1,$$

de unde:

$$x=\cos\frac{2k\pi}{p-q}+i\sin\frac{2p\pi}{p-q}. \quad (k=0, 1, 2, \ldots p-q-1)$$

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Balint Nicolae* (Șc. Polit., Darmstadt, Germania), *Gernăuți Iosef* (lic. Timișoara), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Petrică Ioan* (Șc. de Cond., Cluj), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sprinceană Gheorghe* (lic Galați) și *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Șc. Polit. Leoben, Austria.

680. — *Să se stabilească identitatea:*

$$1-\cos 5t-2\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\cos(k+1)t=\sin 5t\,\operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

V. ALACI

Insemnând cu E primul membru, putem scri succesiv:

$$E=1-\cos 5t-2(\cos t-\cos 2t+\cos 3t-\cos 4t)$$

$$2\sin^2\frac{5t}{2}-2\left(2\sin\frac{5t}{2}\sin\frac{3t}{2}-2\sin\frac{5t}{2}\sin\frac{t}{2}\right)=$$

$$2\sin^2\frac{5t}{2}-4\sin\frac{5t}{2}\left(\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)=$$

$$2\sin\frac{5t}{2}\left(\sin\frac{5t}{2}-4\sin\frac{t}{2}\cos t\right)=$$

$$\frac{2\sin\frac{5t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{5t}{2}\cos\frac{t}{2}-4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\cos t\right)=$$

$$\frac{2\sin\frac{5t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{5t}{2}\cos\frac{t}{2}-\sin 2t\right)$$

Observând că:

$$\sin 2t=\sin\left(\frac{5t}{2}-\frac{t}{2}\right)=\sin\frac{5t}{2}\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{5t}{2}\sin\frac{t}{2}$$

putem scri:

$$E=\frac{2\sin\frac{5t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{5t}{2}\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{5t}{2}\cos\frac{t}{2}+\right.$$

$$\left.\cos\frac{5t}{2}\sin\frac{t}{2}\right)=\frac{2\sin\frac{5t}{2}\cos\frac{5t}{2}\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}=\sin 5t\operatorname{tg}\frac{t}{5}$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluții analoage date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Brotmann Isidor* (lic. Matei-Basarab, București), *Levy Jacques* (lic. Matei-Basarab, București). *Neacșu Vasile* (Șc. Polit., Timișoara) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași).

Soluția 2ª. Insemnând cu E primul membru și înlocuind cosinusurile arcelor multiple în funcție de cosinusul arcului simplu, putem scri succesiv:

$$E=1-\cos 5t-2(\cos t-\cos 2t+\cos 3t-\cos 4t)$$

$$=1-16\cos^5 t+20\cos^3 t-5\cos t-2\cos t+$$

$$4\cos^2 t-8\cos^3 t+6\cos t+16\cos^4 t-16\cos^2 t+2$$

$$=1-\cos t-12\cos^2 t+12\cos^3 t+16\cos^4 t-$$

$$16\cos^5 t=(1-\cos t)(1-12\cos^2 t+16\cos^5 t).$$

Ținând seamă de relația cunoscută:

$$\sin 5t=\sin t(1-12\cos^2 t+16\cos^4 t),$$

putem scri:

$$E=\sin 5t\frac{1-\cos t}{\sin t}=\sin 5t\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=$$

$$\sin 5t\operatorname{tg}\frac{t}{2},$$

și identitatea dată este astfel stabilită.

Soluții analoage date de d-nii: *Cioclov Gh. Gheorghe* (lic. T.-Severin), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Crăciunescu N. Eugeniu*, *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghin Th. Gh.* (lic. Galați), *Hohoi Vasile* (lic. Brașov), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Pantu Z. Ion* (lic Lazăr, București), *Pavel N. Nicolae* (lic. Carol, Craiova) și *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin).

Alte soluții date de d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Petrică Ioan* (Șc. Conductori, Cluj) și *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București).

681. — *Să se rezolve ecuația:*

$$8\cos^2 x-8\cos^4 x+4\cos^2 x-1=0.$$

ION Z. PANTU

Putem scri:

$$(8\cos^6 x-1)-4\cos^3 x(2\cos^2 x-1)=0$$

$$\therefore\quad (2\cos^2 x-1)(4\cos^4 x+2\cos^2 x+1)-$$

$$4\cos^2 x(2\cos^2 x-1)=0,$$

sau:

$$(2\cos^2 x-1)(4\cos^2 x-2\cos^2 x+1)=0$$

(1) $\therefore\ 2\cos^2 x-1=0$, (2) $4\cos^2 x-2\cos^2 x+1=0$

Din (1) deducem:

$$\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \text{deci:}$$

(3) $\quad x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$, sau $\quad x=2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}$

Din ecuația 2ª deducem:

$$\cos x=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},$$

valori care fiind imaginare le putem lăsa deoparte.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Berzovan Emil* (lic. Arad), *Boroianu D. C-tin*, *Brotmann Isidor* (lic. Matei-Basarab, București), *Cioclov Gh. Gheorghe* (lic. T.-Severin), *Crăciunescu N. Eugen*, *Cristescu P. Ion* (lic. Lazăr, București), *Davidsohn Moritz* (lic. Botoșani), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Dinu S. D-tru* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Dragoș Tiberiu* (lic. Arad), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Iași), *Gheorghiev N.* (Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Haim F. L.* (P.-Neamț), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu M. Harambie* (C. de Argeș), *Ionescu G. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Ionescu-Țiu* D. *C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Leibovici R. Emil* (lic. Pitești), *Levy Jacques* (lic. Matei-Basarab, București), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Moisescu Ionel* (lic. Arad), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Neacșu Vasile* (Șc. Polit.,

Timişoara), *Panaite Teodor* (lic. Milit. Iaşi), *Pavel H Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr Bucureşti), *Petrică I. Ioan* (Şc. de Conductori, Cluj), *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit, Iaşi), *Roman I. Joan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iaşi), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Şişu Gheorghe* Şc. Polit., Timişoara), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Streit Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Teodorescu Aurel* (lic. R.-Sărat), *Ţiucra Mircea* (lic. Timişoara), *Vâlsănescu Viorel* (lic. Piteşti) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

S'au mai primit soluţii dela d-nii: *Climescu C. Al.* (Sem. Pedag., Iaşi) şi *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu).

687. — *Dacă avem:*

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}=0,$$

avem şi:

$$\frac{(x+y-z)^2+(x+z-y)^2+(y+z-x)^2}{xy+xz+yz}=-2$$

Asemenea dacă avem:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0,$$

avem şi:

$$\frac{(x+y-z)^2+(x+z-y)^2+(y+z-x)^2}{x^2+y^2+z^2}=3.$$

CEZAR COSNITA

Observăm că:

(1) $(x+y-z)^2+(x+z-y)^2+(y+z-x)^2=3(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx)$,

şi că cele două relaţii de condiţie, aduse la formă întreagă se pot scri, respectiv:

(2) $x^2+y^2+z^2=0$, (3) $xy+yz+zx=0$.

Insemnând cu E şi F primii membri a relaţiilor cerute, putem scri succesiv ţinând seamă de relaţiile (1) (2) şi (3):

$$E=\frac{3(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx)}{xy+xz+yz}=-\frac{2(xy+yz+zx)}{xy+xz+yz}=-2$$

$$F=\frac{3(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx)}{x^2+y^2+z^2}=\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}=3.$$

Relaţiile cerute sunt astfel stabilite.

Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Boncea Spiridon* (lic. Piteşti), *Cinsky C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Crăciunescu N. Eugeniu*, *Cristescu C. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Cuţui I. Lucian* (lic. Piteşti), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dăscălescu St. Hristache* (lic. Focşani), *Dinu S. D-tru* (Şc. de Cond., Cluj), *Gaidaenco A.* (lic Tighina), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiev N*, *Gheorghiu A. Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galaţi), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Haim F. L.* (P.-Neamţ), *Hamparţum Grigore* (lic. Constanţa), *Hascal Jenică* (Roman), *Iacob St. Eugen* (Şc. Milit. de Artilerie), *Iancu D.* (lic. Naţional, Iaşi), *Jonescu C. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeş), *Ioneseu M. Haralambie* (C.-de-Argeş), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Levit Avram* (lic. Tighina), *Levy Jacques* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Mara Şt.* (Arad), *Micu'a O.* (lic. Timişoara), *Mihuţ Metodie* (lic. Caransebeş), *Morţun Ar. C-tin* (Semin, Pedag, Iaşi), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Neacşu Vasile* (Şc. Polit, Timişoara), *Niţulescu Victor* (lic. Caracal), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iaşi), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pârvu Aurel* (lic. Luzăr, Bucureşti), *Petrică I. Ion* (Şc. de Conductori, Cluj), *Petrovici D-tru* (lic. Câmpina), *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Popescu Ion* (Învăţător), *Popper Ervin* (student, Cluj), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Saur Ioan*, *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iaşi), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Şişu Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit. Iaşi), *Topleceanu C-tin* (Caranţebeş), *Ţiucra Mircea* (lic. Timişoara), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

S'au mai primit soluţii dela d-nii: *Climescu C. Al.* (Sem, Pedag., Iaşi), *Panaitescu Ion* (lic. Milii, Craiova), şi *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

Generalizare dată de d-nii: *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galaţi), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

Dacă avem:

$$\frac{x_1}{x_2x_3\ldots x_n}+\frac{x_2}{x_1x_3\ldots x_n}+\ldots+\frac{x_n}{x_1x_2\ldots x_{n-1}}=0,$$

avem şi:

$$E=\frac{(A-2x_n)^2+(A-2x_{n-1})^2+\ldots+(A-2x_1)^2}{\Sigma x_1x_2}=2n-8.$$

Asemenea dacă avem:

$$\frac{1}{x_3x_4\ldots x_n}+\frac{1}{x_2x_4\ldots x_n}+\ldots+\frac{x_n}{x_1x_2\ldots x_{n-1}}=0,$$

avem şi:

$$F=\frac{(A-2x_n)^2+(A-2x_{n-1})^2+\ldots+(A-2x_1)^2}{\Sigma x_1^2}=n,$$

unde:

$$A = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

In adevăr, observând că, relaţiile de condiţie, reduse la forma întreagă. devin:

$$\Sigma x_1^2 = 0, \quad \Sigma x_1 x_2 = 0,$$

iar:

$$(A - 2x_n)^2 + (A - 2x_{n-1})^2 + \ldots + (A - 2x_1)^2 = n\Sigma x_1^2 + (2n - 8)\Sigma x_1 x_2,$$

primii membrii ai relaţiilor cerute, devin:

$$E = \frac{n\Sigma x_1^2 + (2n - 8)\Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1 x_2} = 2n - 8,$$

$$F = \frac{n\Sigma x_1^2 + (2n - 8)\Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2} = 0,$$

şi astfel relaţiile cerute sunt stabilite.

In cazul $n = 3$, avem problema propusă.

PROBLEME PROPUSE

697. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel ca prima cifră înmulţită cu ultima să dea un număr format din cifra a treia urmată de întâia.

GH. SPRINCEANA.

698. — Se cere patratul perfect de şase cifre în care prima cifră este egală cu a cincea, cifra treia scrisă după ultima ne dă un patrat perfect şi a patra cifră scrisă după a doua ne dă a treia cifră mărită cu unitatea.

TRAIAN T. MARINEANU

699*. — Intr'un triunghiu ABC să se înscrie un alt triunghiu $A'B'C'$ ale cărui laturi $A'B'$, $B'C'$, $C'B'$ să fie respectiv perpendiculare pe BC, CA, AB. Dacă a', b', c' sunt laturile triunghiului $A'B'C'$, iar r, r_a, r_b. r_c sunt razele cercului înscris şi ale cercurilor exînscrise triunghiului ABC, să se demonstreze relaţiunile:

$$2r = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{a' + b' + c'}, \quad 2r_a = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{b' + c' - a'};$$

$$2r_b = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{c' + a' - b'}; \quad 2r_c = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{a' + b' - c'}.$$

Să se deducă apoi formulele care să dea elementele lineare şi unghiulare ale triunghiului ABC în funcţie de a', b', c'.

COL. GH. BUICLIU

700. — Un patrulater $ADBC$ are unghiul D drept, laturile AD şi DB fixe de poziţie, vârful C fix şi unghiul C constant. Să se afle locul geometric al mijlocului diagonalei AB.

ION Z. PANTU

701*. — Fie funcţiunea:

$$y = \frac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + cx + d}.$$

Să se determine a, b, c, d astfel ca funcţiunea să aibă minimul $y = -1$ pentru $x = -2$ şi maximul $y = 2$ pentru $x = 1$. Să se reprezinte în acest caz funcţiunea.

ION DIMITRIU-ARAD.

702*, — Două mobile M şi M' se mişcă în mod uniform pe laturile unui unghiu xOy. (M pe Ox şi M' pe Oy). Să se studieze variaţia distanţei MM'.

V. VALCOVICI

703*. — Să se dovedească că avem:

$$\cos\frac{\log(7 + 4\sqrt{3})}{i} = \cos\frac{\log(7 - 4\sqrt{3})}{i} = 7,$$

unde log. înseamnă logaritm neperian, iar $i = \sqrt{-1}$

V. ALACI

704*. Să se rezolve ecuaţia:

$$2\cos^4 x + (4 + \sqrt{3})\cos^3 x - 2(1 - \sqrt{3})\cos^2 x - (4 + \sqrt{3})\cos x - 2\sqrt{3} = 0.$$

CEZAR COSNITA

INFORMAȚIUNI

Inscrierile pentru concursul „R. M. T.“, anunțat în No. 9, an. VII, se primesc numai până la 20 Martie 1928. Problemele pentru concurs sunt toate cele ce se vor publica în zece numere consecutive, incepând cu No. 9, an. VII, sub titlu *„Probleme propuse“*.

Rezultatul se va publica, dupăce toate problemele de concurs vor fi rezolvate în cuprinsul revistei.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

— —

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

— —

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

— —

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMIȘOARA.

TABLA DE MATERII

ARTICOLE

Constantinescu G.	Variațiunea expresiunii $f(x) : \varphi(x)$	4
Sergescu P.	Asupra unor însumări . . .	27
Gradin I. Gh.	Generalizarea unei probleme .	43
Popovici Tib.	Generalizarea unui determinant	59
Manolescu I. N.	O metodă pentru aflarea sumei puterilor asemenea ale unei progresii aritmetice . . .	75
***	Regele Ferdinand I, făuritorul României Mari a murit . .	91
V. Vâlcovici	Concursul Revistei Matematice din Timișoara	95
Coșniță V.	Asupra unor conice	92
Ștefănescu E.	Câteva inegalități	107
Ionescu-Bujor C.	Puncte colineare în legătură cu câteva axe radicale	123
Alaci V.	Sume trigonometrice transformate în produse	139
***	Concursul R. M. T.	147
Teodorescu C.	Media aritmetică	159
Manolescu I. N.	Câteva proprietăți ale unor triunghiuri	175
Popovici Tib.	Asupra descompunerii unui trinom cu coeficienții rationali	195

NOTE MATEMATICE

Ianculescu Oct.	Generalizarea exercițiului 72, din anul XXX, al G. M. . .	16
Pantu Z. Ion	Suma ghiulelelor în formă de piramidă cu bază triunghiulară	16
Musta St.	Asupra eliminantului a două ecuații de gradul al doilea	32
Manolescu I. N.	Asupra articolului „Generalizarea unor identități trigonometrice	32
Gheorghiu Th. Gh.	Generalizarea problemei 597 .	44
Nestor D.	Asupra problemei 581 . . .	60
Musta St.	Asupra podarei conicelor . .	61
Agronomof N.	Sur les triangles égaux homologiques inscrits à un même cercle	77
Csilcser Er.	Asupra rezolvării algebrice a ecuațiilor de gradul III și IV	77
Coșniță V.	Asupra unei probleme de geometrie analitică	93
Popovici Tib.	Asupra funcțiunilor pseudo-omogene	109
Popovici Tib.	Geometrie și mecanică . . .	109
Popovici Tib.	Asupra unui articol	109
Maris Marius	Asupra unor identități . . .	109
Popovici Tib.	Asupra unui articol	128
Gaiu G. Em.	Asupra centrelor conicelor înscrise într'un triunghiu . .	128
Dănciulescu Gr. V.	Asupra problemei 368 . . .	129
V. A.	Asupra formulelor lui Euler .	146
Râpeanu V.	Asupra problemei 554 . . .	147
Agronomof N.	Sur une fonction numérique .	161
Dumitriu Arad I.	Asupra cevienelor în triunghiuri	162
Buicliu Gh. Col.	Asupra problemei 647 . . .	181
Alaci V.	Asupra unor formule	182
Alaci V.	Sume trigonometrice transformate în produse	183
Botea G. N.	Asupra problemei 320 . . .	198
Morțun E.	Interpretarea geometrică a funcțiunilor pseudoomogene . .	199

BIBLIOGRAFIE

Gazeta Matematică, 16, 33, 45, 62, 79, 94, 110, 129, 149, 164, 185, 200.

Revista de Ciencias, 17, 164.

Curierul Matematic, 17, 33, 80, 94, 110, 149, 164, 200.

Bulletin Scientifique de l'école polytechnique, 94.

Revista Matematică din Galați, 149, 200.

Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences 33, 149.

Novacu M.	Dare de seamă asupra Societății Științifice a elevilor liceului Moise Nicoară din Arad . .	17
Popovici Tib.	Asupra unor polinoame remarcabile cu o notă asupra formulei binomului	62
Rietz Henry Lewis	Mathematical Statistics . . .	80

Agronomof N.	Sur la transformation de l'équation générale d'une courbe du second ordre	80
Agronomof N.	Sobre alcunos cuestiones de analisis indeterminado . .	80
Agronomof N.	Sobre una funcion numerica .	80
Agronomof N.	Nota complimentaria sobre la foncion S (N)	80
Agronomof N.	Sur un théorème de Laguerre	80
Agronomof N.	Sur un problème de la construction	80
Sergesco P.	Sur une formule de récurrence propre au calcul de certaines intégrales	149
Nicolescu M.	Sur les fonctions de bi-points et les fonctions aréolairement conjuguées	149
Emmanuel David	Lecțiuni de teoria funcțiunilor	149
Lalescu Traian	Curs de geometrie analitică .	149
Abramescu N.	Lecțiuni de geometrie analitică	150
Dumitriu Ioan	Geometrie analitică	150
Lainé E.	Précis d'Analyse mathématique	186
Niewenglowskhi B.	Questions d'arithmétique . .	186

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIȘOARA

Examen de fine de an, geometrie analitică 74
Examenul de admitere 148
Examen geometrie analitică și analiză 169

PROBLEME PROPUSE

Numărul de ordine al problemei în *cifre cursive*, primul număr următor indică pagina unde a fost propusă în anul respectiv, al doilea număr indică pagina unde a fost rezolvată, N indică problemele nerezolvate.

DIN ANUL I.

42, 94, N;
50, 110, N;
54, 126, N;
69, 142, N;
91, 187, N;
92, 187, N;
98, 187, N;
99, 187, N;
100, 187, N.

DIN ANUL II.

109, 14, N;
110, 14, N;
114, 30, N;
120, 30, N;
124, 30, N;
140, 62, N;
141, 62, N;
142, 77, 200 VII;
150, 78, N;
154, 78, N;
156, 94, N;
157, 94, N;
161, 94, N;
162, 94, N;
163, 94, N;
164, 94, N;
165, 94, N;
173, 110, N;
174, 110, N;
175, 110, N;
176, 126, N;
178, 126, N;
180, 126, 186 VII;
184, 126, N;
185, 126, N;
186, 142, N;
191, 142, N;
194, 142, N;
195, 142, N;
197, 158, 186 N;
198, 158, N;
199, 158, N;
205, 174, 186 VII;
206, 174, N;
207, 174, N;
208, 174, N;
212, 174, N;
213, 174, N;
214, 174, N;
217, 185, N.

DIN ANUL III.

230, 14, N;
235, 30, N:
243, 46, N;
244, 46, N;
248, 46, N;
253, 62, N;
255, 62, N;
259, 62, N;
264, 78, N;
268, 78, N;
275, 78, N;
289, 126, N;
291, 126, N;
296, 126, N;
299, 142, N;
304, 158, 187 VII;
305, 158, 188 VII;
307, 158, 201 VII;
310, 174, N;
313, 174, N;
315, 174, N;
317, 174, N;
318, 185, 189 VII;
319, 185, N;
323, 185, 201 VII.

DIN ANUL IV.

329, 14, 189 VII;
331, 14, 202 VII;
334, 14, N;
335, 14, N;
336, 14, N;
343, 30, N;
344, 30, N;
345, 30, N;
347, 46, N;
357, 62, N;
359, 62, N;
361, 78, N;
369, 94, N;
376, 94, N;
382, 110, N;
390, 126, N;
393, 126, N;
401, 158, N;
406, 158, N;
407, 158, N;
411, 158, N;
413, 174, 45 VII;
414, 174, N;
415, 174, 46 VII;
418, 174, N;
421, 191, 47 VII;
423, 191, N;
424, 191, N.

DIN ANUL V.

435, 13, N;
440, 30, N;
441, 30, 47 VII;
442, 30, N;
443, 30, 48 VII;
444, 30, N;
445, 46, N;
448, 46, 49 VII;
449, 46, 51 VII;
450, 46, N;
458, 62, N;
460, 62, N;
462, 62, N;
464, 78, N;
473, 94, N;
474, 94, N;

475, 94, N;
478, 94, N;
479, 94, N;
481, 110, 190, N;
485, 110, N;
489, 126, N;
494, 126, 52 VII;
502, 142, N;
507, 159, N;
508, 159, N;
509, 159, N;
512, 159, N;
514, 174, N;
516, 174, N;
518, 190, N;
519, 190, N;
524, 190, N.

DIN ANUL VI

526, 14, N;
527, 14, N;
528, 14, N;
531, 14, N;
533, 30, N;
534, 30, N;
535, 30, N;
537, 30, N;
540, 46, N;
541, 46, N;
542, 46, N;
543, 46, N;
544, 46, N;
548, 46, N;
549, 62, N;
550, 62, N;
551, 62, 33, VII;
567, 78, N;
558, 78, N;
562, 78, N;
565, 94, 17 VII;
567, 94, 18 VII;
568, 94, 80 VII;
569, 94, N;
572, 110, 96 VII;
573, 110, 62 VII;
574, 110, 63 VII;
577, 110, 19 VII;
578, 110, 64 VII;
579, 110, 65 VII;
580, 110, 80 VII;
583, 126, 97 VII;
584, 126, 81 VII;
585, 126, 99 VII;
587, 142, 189 VI, 83 VII;
591, 142, 83 VII;
592, 143, 86 VII, N;
593, 142, 84 VII;
594, 142, 19 VII;
595, 158, 66 VII;
596, 158, 68 VII;
597, 158, 20 VII;
598, 158, 35 VII;
599, 158, 36 VII;
600, 158, 37 VII;
601, 158, 84 VII;
602, 158, 85 VII;
603, 174, 100 VII;
604, 174, 100 VII;
605, 174, 110 VII;
606, 174, N;
607, 174, 52 VII;
608, 174, N;
609, 174, 69 VII;
610, 190, 37 VII;
611, 190, N;
612, 190, N;
613, 190, N;
614, 190, 101 VII;
615, 190, 101 VII;
616, 190, N.

DIN ANUL VII.

617, 22, 118, N;
618, 22, 111;
619, 22, 129;
620, 22, 130;
621, 22, 111;
622, 22, N;
623, 22, 112;
624, 22, 114;
625, 38, 115;
626, 38, 115;
627, 38, 132;
628, 38, 118, N;
629, 38, 118, N;
630, 38, 133;
631, 38, 133;
632, 54, 116;
633, 54, 116;
634, 54, N;
635, 54, N;
636, 54, 203;
637, 54, 117;
638, 54, 164;
639, 54, N;
640, 70, 150;
641, 71, 150;
642, 72, 152;
643, 72, 152;
644, 72, 165;
645, 72, 153;
646, 72, N;
647, 86, 166;
648, 86, 167;
649, 86, N;
650, 86, 167;
651, 86, 169;
652, 86, N;
653, 86, N;
653bis, 102, N;
654, 102, N;
655, 102, N;
656, 102, N;
657, 102, N;
658, 102, N;
659, 102, N;
660, 102, N;
661, 118, N;
662, 118, N;
663, 118, N;
664, 118, N;
665, 118, N;
666, 134, N;
667, 134, N;
668, 134, N;
669, 134, N;
670, 134, N;
671, 134, N;
672, 134, N;
673, 134, N;
674, 154, N;
675, 154, N;
676, 154, N;
677, 154, N;
678, 144, N;
679, 154, N;
680, 154, 203;
681, 154, 204;
682, 170, N;
683, 170, N;
684, 170, N;
685, 170, N;
686, 170, N;
687, 170, 205;
688, 170, N;
689, 190, N;
690, 190, N;
691, 190, N;
692, 190, N;
693, 190, N;
694, 190, N;
695, 190, N;
696, 190, N;
697, 206, N;
698, 206, N;
699, 206, N;
700, 206, N;
701, 206, N;
702, 206, N;
703, 206, N;
704, 206, N.

TABLOUL NUMELOR

Abason E., 2, 22, 33.
Abramescu N., 2.
Adam I. Mircea, 186, 187.
Adam Radu, 189.
Adam D. Romeo, 2.
Adamescu Maxim, 2.
Agapescu M. Nic., 46, 50, 188, 189.
Agarici G. Dum., 49, 114.
Agronomof N. 16, 77, 80, 162.
Akerman Cazimir, 45, 51.
Alaci Val., 2, 17, 19, 22, 38, 48, 52, 54, 68, 70, 81. 86, 101, 102, 112, 116, 118, 133, 134, 139, 154, 170, 183, 185, 190, 203, 206.
Albeața N. Ermil, 18, 36, 37, 38, 53, 84, 97, 100. 101, 102, 114, 116, 150, 151, 152, 153, 154, 165, 166, 167, 168, 203, 204, 205.
Alexandrescu El., 2.
Alexandrescu I., 153.,
Alexiçi G., 33.
Aldea Nic., 38, 114, 116, 130, 150, 153, 155, 165, 167, 205.
Anastasiu P. Vasile, 46, 49, 52, 155.
Angelescu A., 2.
Angelescu N. Tr., 188, 189.
Angheluță Th., 2. 33.
Antistescu N., 155.
Antonescu Aurel 38.
Antonescu E., 155.
Antonescu Gh., 155.
Antoniu I. Ion, 187.
Antoniu V., 18, 34.
Apăteanu T. Al., 114, 130.
Aposteanu Ion, 46, 49.
Ardelea Radu, 46, 49, 202.
Arghir Iancu, 2.
Arsene Alex., 53, 101, 111, 114, 116, 117, 132, 133, 150, 151. 153, 154, 165, 166, 167, 204, 205.
Atanasescu V. Dum., 20, 37. 38, 53, 97, 155.
Atanasiu I. Dtru., 187.
Atanasiu M. Const., 18, 34, 49, 51, 52.
Avramescu Th. Ion, 20, 38, 66, 100, 114.

Băcanu V. Ion, 20.
Baciu Gh. Teodor, 18, 20, 36, 114, 132, 134, 151, 152, 153, 154, 165, 167, 168, 188, 204.
Badea C., 155.
Bădescu I. Amedeu, 49, 114, 151, 154, 165, 167, 205.
Bădescu Aurelian, 51, 52.
Bădulescu V., 2.
Balaban Gh., 2.
Balaban I. Gh., 113, 114, 118, 130, 154, 165, 167, 168, 205.
Balaban N. 2.
Balasz A., 155.
Balasz D., 2.
Balint N., 203.
Bălăsescu N. C., 18, 20, 36, 49, 50, 52, 66, 70, 152.
Băjenariu Pantelie, 165.
Bănărescu M., 2.
Bancilă Mircea, 47, 51.
Banciu I., 2.
Bărbulescu M. Tudor, 165.
Bărglăzan A., 187.
Baron C., 2.
Bârloiu D. Nic., 153, 165.
Bârs Petre, 18, 49, 51, 83, 101.
Beju Traian, 48, 49, 85, 86, 188, 189, 202.
Belcescu Dim., 53, 111.
Beldie Dum., 46, 49, 50, 186, 187, 188, 189.
Bercovici A. Emil, 188.
Berdan C., 186, 187, 188, 189, 201, 202.
Berneagă Gh., 155.
Berzovan Emil, 37, 114, 116, 204.
Beșliea N., 46, 47, 49, 51, 80, 133, 134, 188, 189, 190.
Birceanu Ovid, 36, 37.
Birkenthal Alex., 53, 154, 165.
Bișir Gh., 155.
Bivolaru C. Victor, 66.
Blaha N., 16.
Blaşian V., 2.
Blasko Beatrice, 45, 46, 47, 48, 49 51, 52, 188, 189, 201.
Bogdan V., 155.
Boghiu Iosif, 49.
Boju Rossetel, 188.
Boncea Spiridon, 116, 150, 151, 153, 165, 167, 205.
Bonea Ion, 187.
Bordeianu Adrian, 53, 66, 111, 116, 132, 167, 170.
Borneanu Gh., 17.
Boroianu D. Cont., 204.
Boroș P. Dan, 203.
Bossie V., 188, 202.
Botea Gh. Emil, 20, 21, 36, 37, 64, 65, 68, 83, 84, 85, 86, 95, 97, 100, 103.
Botea N., 17, 35, 45, 46, 47, 170, 186, 187, 189, 190, 199, 202.
Botez M., 2.
Both Ion, 18, 35, 83.
Braester Otto, 46, 47, 49, 188, 189, 190, 203.
Brânză Petru, 165.
Bratosin Radu. 20.
Bratu Gh., 2.
Breazu D., 2.
Bucurescu I.. 151, 167.
Bucurescu I. C., 153, 165.
Budișteanu Al., 189.
Buicliu Gh. Col., 2, 33, 36, 47, 86, 96, 97, 100, 101, 170, 181. 206.
Burghele C., 2.
Butoescu Tr., 2.

Cădariu I., 111, 114.
Caftangioglu C. Const., 48, 49.
Căldăraru Leon, 202.
Călin M. Gh., 46, 48, 53, 100, 111, 114.
Călinescu I. Aurelian, 112, 114, 115, 116, 130, 133.
Calmanovici Sam., 188.
Câlniceanu Gh., 18, 20, 36, 37, 45, 51, 52, 53, 68, 100, 155.
Cândea C., 2.
Cantacuzino I., 188.
Carabeţeanu Gh. P., 18, 52.
Caracaș I. Gh., 46, 48, 49.
Caracostea Andrei 46.
Caraman E., 2.
Cârdei V., 2.
Catricicău M., 155.
Catz Boruh, 20.
Căzămir A. Iosif, 18, 36, 38, 51, 52 111, 112, 114, 115, 116, 130, 150, 153, 165, 167.
Cazanachi P., 187.
Cercel Const., 50.
Cernăuți Iosif, 20, 53, 102, 111, 112, 114, 118, 130, 133. 151, 154, 165, 167, 168, 203.
Chirilă Ion, 46. 49.
Chițan Gr., 155.

Chivulescu C., 2.
Cica Gh., 2.
Cimpoes D. Nic., 115.
Cinski Const., 205.
Ciocionică P., 36.
Cioclov Gh., 153, 204.
Ciocoiu Laurenţiu, 46.
Cioranescu C-tin., 188, 189, 190, 202.
Ciurceu V., 2.
Ciută St., 188,
Cizmărescu M., 2.
Climescu C. Alex., 111, 113, 115, 116, 130, 133, 150, 154, 165, 205.
Cocârlan Pavel, 36, 58, 102, 114, 153, 154, 165, 168.
Cocorandu Dan, 35.
Cogan Alter, 50.
Cojan D. Gh., 186.
Cola Sebastian, 20, 83, 100, 101.
Colceag I., 155.
Coman Aug., 2, 83.
Comănescu—Bălteni Al., 188, 190, 202.
Constantinescu D., 155.
Constantinescu Gh., 2. 4, 22, 38, 111. 115, 134, 154.
Constantinescu Gh. Gh., 45, 203.
Constantinescu I, 187.
Corneanu P., 2.
Corşoreanu Gh. Gh., 205.
Cosma Z. Gh., 46, 49.
Coşniţă Cezar, 54, 86, 101, 102, 116, 118, 134, 150, 151, 153, 154, 165, 167, 170, 190, 205, 206.
Coşniţă Virgil, 46, 92, 94, 187.
Costăchescu V. C-tin., 18, 20, 36, 37, 38, 51, 52, 53, 54, 65, 66, 84, 86, 101, 102, 103, 111, 113, 115, 117, 118, 130, 133, 134, 167, 190, 205.
Crăciunescu N. Eugen, 20, 38, 53, 101, 102, 114, 115, 116, 153, 154, 165, 168, 204, 205.
Crăciunescu I., 2.
Craiu N. Ion, 20, 36, 38, 66, 84, 102, 111, 114, 116, 150, 153, 167, 168.
Creţoiu A., 187.
Cristescu I., 2.
Cristescu C. I., 20, 51, 66, 150, 151, 165, 167, 170, 205.
Cristescu P. I., 204.,
Cristescu S., 18.
Critz D., 202.
Csilcser Ernest, 79.
Curcurbată Dionisie, 46, 49, 155.
Cutcudache P., 155.
Cuţui I. Lucian, 105.

Dâmboi E., 155.
Dănciulescu Gr. Virgil, 18, 20, 36, 37, 48, 49, 53, 63, 66, 68, 70, 81, 83, 84, 85. 86, 95, 97, 100, 101, 103, 111, 114, 115, 116, 118, 129, 130, 132, 150, 151, 152, 153, 154, 165, 166, 167, 168, 203, 204, 205.
Dânga S. Vlad., 46, 49, 51, 52, 186.
Daraban N. Paul., 46, 49, 50.
Dărmănescu I., 47, 49, 50.
Dăscălescu Cristache, 20, 111, 150, 151, 153, 154, 165, 167, 168, 205.
David Gheorghe, 190.
Davidson Moriţ 204.
Demetrescu A., 53.
Demetrescu N. August, 115, 165, 167, 170.
Demian Dorina, 18,
Deoanca Ni., 48, 51.
Diaconescu V. Alex., 68.
Diaconescu H. Aurel, 114, 132, 165, 167.
Diaconescu Nic., 2.
Diaconescu V. Theodor, 49.
Diaconu D. Marin, 46, 189, 190, 202,
Diminescu Gigi. 66.
Dimitriu Mihai, 46.
Dimitriu Ion, 20.
Dimitriu Ath. Ion., 18. 34, 37. 38, 66, 100, 101, 102, 112, 114, 115, 116, 117, 118, 150, 151, 153, 154, 165, 167.
Dimoviceanu M. D., 20, 36, 37, 155.
Dinescu Florin, 46, 50, 52.
Dinu S. Dum., 20, 34, 38, 46, 101, 110, 111, 113, 115, 130, 151, 152, 153, 154. 165, 168. 204, 205.
Dinu I., 155.
Dobromirescu Pant., 38, 68, 114, 117, 150, 151, 153, 165, 167, 168.
Dordea Nic., 51.
Dorneanu P. Vasile, 46, 47, 49, 188, 189, 202.
Dosoftei R., 155.
Dragalina Corn., 2.
Dragan C. Gh., 18, 49, 52, 83.
Dragan I. Corneliu. 114, 153.
Draghiceanu M., 155, 190.
Dragnea Gh. Ovid, 18.
Dragos Tib., 204.
Drăgut G. Vasile, 38, 151, 153, 165, 166, 167.
Dravătz Ion, 46, 48, 51, 52.
Drogeanu N. Paul. 46, 47, 50.
Dubleşiu C., 155.
Dugan C. Victor, 46.
Dumitrescu Crt., 2.
Dumitrescu Eugen, 18, 20, 35, 36, 37, 50, 83, 86, 100, 101, 110, 112, 114, 115, 116, 130, 132, 133.
Dumitrescu Al. Gh., 46.
Dumitrescu Gh., 2.
Dumitrescu G. I., 188, 201.
Dumitrescu I., 155.
Dumitrescu A. Mişu, 186, 189.
Dumitrescu Nic., 115, 153, 165.
Dumitriu-Arad I., 2. 164, 206.
Dumitriu Gh. Stefan, 38, 53, 86, 111, 114, 115, 116, 117, 129.
Dunu Ion, 113.
Dutchievici M., 153.
Duţulescu Marin, 2.

Epure Stefan, 188, 189.
Ettinger Alex., 100, 111, 112, 113, 114, 115, 116. 117, 133, 150, 151, 153, 154, 165, 167, 168.

Faibovici Henri. 49.,
Feinstein Herman, 49.
Feldstein Solomon, 50, 52, 54, 130.
Fericeanu Stefan, 18, 20, 36, 37, 38, 53, 97, 101, 102, 114, 115, 151, 153, 155, 165.
Filipescu Em. Gh., 16.
Filitti Radu, 36, 53.
Flickstein I., 189, 190.
Floareş I. Mircea, 20 84, 114, 116, 118, 134, 150, 151, 153, 154, 165, 167, 168.
Florea C. Alex., 188.
Florea V. Gh., 45, 46, 49, 51.
Florescu Th. Const., 18, 111, 114.
Florescu Mihai, 2.
Florescu M. Oct., 47, 190.
Foca I., 49, 51.
Franţiu Ion, 18, 36, 49.
Fraţilă D. Oancea, 50, 52.
Frumuşelu H. Gh., 35, 46. 49, 51.

Gabrielescu V., 186.
Gaidarenco A., 205.
Gaiu G. Emanoil, 129.
Ganea Vasile, 18, 38, 68, 70, 114, 116, 151 153, 165, 167, 170, 205.
Ganea M., 155.
Ganea Macedon, 36, 37, 53.
Gârd I. D-tru, 114, 165.
Gârleşteanu M., 46, 49, 188, 203.
Gârneaţă Eraclie, 53, 101, 111, 114, 132.
Gataianţu V. Barbu, 46, 49, 190.
Gavrilescu Ionel, 114, 190.
Gavrilescu N. I, 203.
Gavrilescu Mircea, 111, 114, 116, 130, 153, 165, 167.
Georgescu Chiriac, 189.
Georgescu D., 2.
Georgescu Er. Florian, 186, 187.
Georgescu Gh., 155.
Georgescu S. Gh., 18.
Georgescu-Val. I. N., 186.
Ghelber Mauriciu, 188, 202, 203.
Gheorghe David, 63.
Gheorghe Mihai, 36, 38, 53, 100, 101, 111, 114, 116, 130, 132, 133, 150, 151, 153, 165, 167, 168, 204, 205.
Gheorghiev Nic., 20, 36, 37, 114, 115, 153, 154, 165, 204, 205.
Gheorghiu Alex., 20, 36. 37, 38, 53, 101, 114, 115, 116, 117, 132, 133, 150, 151, 153, 165, 167, 204, 205.
Gheorghiu C-tin Adrian, 46, 48, 50, 51, 52. 188.
Gheorghiu C. Const., 114, 130, 155.
Gheorghiu Th. Gheorghe, 19, 20, 36, 37, 45, 46, 48, 49, 51, 52, 54, 63, 64, 80, 81, 83, 84, 86, 95, 97, 100, 101, 103, 134, 150, 152, 154, 165, 167, 168, 170, 186, 188, 189, 190, 200, 204, 205.
Gheorghiu Mircea, 205.
Gheorghiu Nic., 168.
Gheorghiu Traian, 52.
Gherbanovschi F. Nic., 46, 49, 51.
Ghermănescu M., 2, 202.
Ghinicescu I, Gh., 46.
Ghişoiu I. Petre, 153, 165, 205.
Golcea Cornel, 190.
Golden Artur, 114.
Goldstein G. A., 21, 38. 53, 81, 115, 130.
Goldstein Eleazare, 81.
Goldstein N., 189, 202.
Goldstein Pavel, 51.

Golubenco B., 105,
Grabovschi Eugen, 46.
Gradin I. Gh., 43, 46, 49, 51, 64, 115, 202.
Grigore Ion, 49.
Grigore T. V., 202.
Grigore Nicolae, 190.
Grigorescu C., 155.
Grigorescu L. Ion, 189, 202.
Grofşoreanu I. Gh., 40, 51, 190, 201, 202.
Grofşoreanu Nic., 46.
Grozăvescu Dum., 203.
Grozăvescu Petru, 203.
Grubenmann I. Gh., 46.
Grünfeld Max., 187.
Gulian Emil 188.

Haican Aurel, 111.
Haim L., 100, 101, 111, 115, 116, 132, 150, 165, 204, 205.
Haimer Semuel, 188.
Hamparţum Gr., 53, 81, 100, 111, 150, 151, 165, 167, 168, 205.
Handjeff Velislav, 47, 51.
Haritanu D. Gh., 46.
Hascal Jenică, 205.
Herscovici Emanuel, 188, 189, 190. 201, 202.
Hoepfner V., 73, 86.
Hohoi V., 114, 115, 130, 150, 151, 153, 154, 165, 167, 204.
Hristea Horaţiu, 2.
Hubert M., 2.
Hulubei Telemac, 46, 203.

Iacob St. Eugen, 20, 46, 49, 83, 165, 167, 168, 170, 190, 205.
Iancu David, 38, 50, 53, 68, 81, 84, 86, 100, 101, 103, 111, 113, 115, 116, 117, 150, 151, 152, 153, 154, 165, 167, 168, 170, 203, 204, 205.
Iancu Dumitru, 36, 68.
Iancu Mişu 111.
Ianculescu Oct., 16, 18, 49, 54, 101, 102.
Ieremia Petru, 46.
Ignaţ I. Paul, 53, 101, 150, 153, 155,
Iliescu St, Dima, 189,
Iliescu Mircea, 46, 188, 189, 190.
Iliescu Th. Theodor, 38, 53, 65, 101, 102.
Iliescu Virgil, 189, 202.
Iliovici C-tin, 52, 167, 168.
Imre-Macri Ştefan, 20.
Ioachim Grigore, 46, 49.
Ionescu Angelo, 46, 49, 51.
Ionescu B. Alex. 51, 52.
Ionescu C. Const., 150, 151, 153, 167, 204, 205.
Ionescu K. C. 2.
Ionescu Felix, 18.
Ionescu Gh., 153, 165, 205.
Ionescu Haralamb. 20, 37, 38, 46, 48, 51, 102, 204, 205.
Ionescu Ion, 33.
Ionescu I., 36, 114.
Ionescu M. I., 51, 165.
Ionescu Mihai, 115.
Ionescu C. Niculae, 47,
Ionescu A. Ştefan, 46.
Ionescu G. Virgil, 114, 118, 130, 132, 133, 153, 167.
Ionescu-Bujor Th. Andrei, 45, 46, 49, 51, 52, 188, 190.
Ionescu-Bujor Th. Const., 18, 38, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 62, 102, 123, 132, 188, 189, 292.
Ionescu-Ţiu D. Const. 114, 115, 116, 117, 133, 134, 150, 151, 153, 154, 165, 168, 204, 205.
Ioniţă M. Ion, 47.
Iorga St., 155.
Iovănescu Dan, 18, 20, 35, 53, 63. 66, 84.
Iovănescu Dum., 20, 66.
Iovănescu Felix, 35, 51.
Irhaşiu Viorel, 51,
Isăcescu Titi 18, 114, 132.
Isaicu I., 155.
Iscovici Paul, 49, 50, 52.
Iscu Coriolan, 114.
Istinie I. C. Brezuică 46, 187, 190.
Iüstel T., 155.
Ianov E., 155.

Jecu M. Ion. 2.
Jojea Nic., 189, 202.
Jojea Paul, 202.
Jora Nic., 188.

Kassargian A., 188.
Katz Lazăr 46, 50, 203.
Katz Pincu, 187, 188, 189.
Kertesz Paul, 46, 49.
Kielburger Mih., 115 133, 153, 155, 165.
Klein S., 186.
Koneczny Artur, 52.

Lalescu Traian, 2, 195, 196. 197.
Lateş I. Vasile, 46.
Lăzărescu I. Ion, 49.
Lăzărescu Nic., 36.
Lăzărescu M. Vasile, 188.
Leibovici R. Emil, 116, 133, 165, 204,
Leonida D., 2.
Lepădatu Miclea, 18, 20, 36, 37, 46. 48, 49, 51, 52, 53, 84, 86, 102, 110, 114, 202.
Lepădatu Victor, 49, 51, 189.
Levy Avram, 205.
Levy Jacques, 114, 130, 150, 151, 165, 167, 204, 205.
Linteş I., 2, 186.
Liteanu Gh., 2.
Lupan A., 188.
Lupşan Nedelcu, 18.
Lutsch S., 155.

Magda Ovidiu, 153, 167.
Magheru I., 2.
Mălăescu T., 114,
Manafu Val., 189.
Mândru P., 155.
Manoil A., 20. 66, 189.
Manoil Eugen, 47.
Manolescu I. Nicolae, 18, 20, 33, 34, 36, 37, 38, 46. 48, 49. 51, 52, 53, 64, 66, 68, 70, 75. 83, 86, 97, 100, 101, 102, 118, 133, 154, 175, 187, 188, 189.
Manoliu Gh., 188.
Manughevici, C., 2.
Mara Ştefan, 20, 115, 205.
Marcovici H., 46, 47, 49.
Marcovici Mauriciu, 46.
Mărculescu I. Origen, 18, 36, 37, 53, 84, 112, 113, 130, 153, 154, 165.
Mardan D., 2.
Mareş Grig., 46, 50.
Marinas B. Marin, 20.
Marineanu Traian, 49, 52. 115, 134, 153, 155, 165, 167, 206.
Marinescu, I. Ion 202.
Marinescu S. D., 49, 203.
Marinescu N. Nic., 18, 20, 36, 38, 49, 53, 66, 68, 83, 84, 86, 100, 102, 103.
Marinescu Traian, 188, 189.
Marinescu Iulian, 64.
Marini Paul, 188, 202.
Marius Mariş, 18, 46, 49, 50, 83, 100, 110, 202.
Măru Dum., 186.
Matak Radu, 51.
Mătăsaru Tase, 66.
Mateescu I., 101.
Micu I. Ion, 203.
Micula Ovid, 46, 165, 167, 168, 203. 204, 205.
Miculescu N., 155.
Mihăescu I. Virgil, 151, 165.
Mihailescu Cezar, 100, 110.
Mihailescu St. Nic., 46, 48, 52.
Mihailescu Romeo, 188, 190, 202.
Mihailescu D. Traian, 101, 102.
Mihaly El., 2.
Mihuţ Metodie, 205.
Milculescu G. D-tru., 46.
Minea Titus, 50.
Minoiu I., 155.
Mioc V., 2.
Mircea N., 155.
Mirescu Petre, 188.
Mirică V. Th., 46.
Mişa N., 155.
Mitescu D. Remdecht, 190.
Miu M. Ion. 45, 182.
Mocuţa Tr., 36, 38, 51, 52, 111, 112, 114, 115, 116, 130, 132. 133, 150, 153, 165, 167.
Moisescu Ionel, 115, 116, 204.
Morărescu Ion, 114, 154.
Motaş C., 50.
Morţun A. C-tin, 113. 115, 165, 205.
Mortun Emil, 200.
Müller C. Gh., 20, 68, 83.
Munteanu Gh., 46, 48, 51, 52.
Munteanu Zeno, 37, 114. 115, 116.
Murărescu Aurel, 189.
Murăroiu Aurel 115, 130, 150, 151, 153, 165, 167, 204, 205.
Musta Ştefan, 22, 32, 62, 110, 129.
Muster H. D-tru, 18, 20.

Nan Victor, 46.
Nanes Gh., 2.
Neacşu Vasile, 18, 204, 205.
Nedelcu Lupsan, 132.
Negreţu Florea, 187.
Negroiu Pascu, 189.

Nestor Dum., 19, 20, 21, 34, 36, 37, 46, 48, 49, 50, 52, 61, 63, 64, 68, 83, 84, 85, 86, 95, 97, 100, 103, 188, 189, 201, 202, 203.
Neumann Maria, 46, 190, 202.
Nichita C. Aurel, 18, 20, 37, 53, 66, 68, 77, 86, 100, 101, 111, 114.
Nichifor Gh., 2.
Nicolau Alex., 2.
Nicolau C., 49. 51.
Nicolau I. C., 51.
Nicolau Dobridor, 51, 52.
Nicolau Pompiliu, 2.
Nicolau Isaiia 186.
Niculescu Alex., 70, 151, 155, 187.
Niculescu Gh., 155.
Niculescu St. Emanuel, 51, 52.
Nițulescu Gh. Victor, 114, 154, 205.
Noaghea Gh., 2.
Novac Aurel, 114, 153.
Novacu Valeriu, 17, 19, 20, 21, 36, 37, 46, 49, 52, 63, 64, 66, 68, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 95, 97, 103, 133, 153, 190.

Octavian N. F., 46.
Olariu V. Ene., 46.
Oncica Ion, 2.
Onicescu O., 2, 33.
Oniga I., 155.
Orășanu C., 2.
Orășanu Gr., 2.
Otopeanu C., 2.

Pamula Alex., 22, 187, 188, 189.
Panaite N. Teodor, 53, 101, 111, 132, 150, 151, 153, 165, 167, 205.
Panaitescu C. Ion,, 151, 165, 167, 205.
Pantazi M. Alex., 20, 37, 83.
Pantu Z. Ion, 16, 18, 20, 37, 38. 48, 49, 51, 53, 64, 66, 68, 70, 83. 84, 86, 95. 97, 99, 100, 101, 102, 103, 111, 112, 113, 115. 116, 117, 133, 150, 151, 152, 153. 154, 165, 167, 168, 170, 203, 204, 205, 206.
Paraschivescu Spiridon, 111, 114.
Pârvu Aurel, 20, 36, 38, 49, 53, 68, 83, 111, 114, 115. 116, 117, 118, 134, 150, 151, 153, 165, 166. 167, 168, 170.
Pârvulescu M. Stefan, 114, 132, 151, 167.
Pârvulescu Titus 187.
Pascariu Alex., 18. 46, 51.
Pascu D., 188.
Pascu Ion, 130.
Pâslariu Nic., 51.
Patega T. Ion, 37.
Pătroianu Mih., 188, 189, 190, 202.
Patron Th. Nic., 18, 20, 36, 37, 66, 68, 83, 84, 86, 103,
Păun C., 155.
Pavel E. Nic., 102, 111, 115, 116, 117, 151, 167.
Pavel H. Nic., 20, 38, 53, 101, 154, 165, 204, 205.
Pavelescu Mircea, 18.
Percea V., 187, 188, 201, 203.
Petreanu P., 155.
Petrescu A., 2.
Petrescu St. Alex. 46.
Petrescu Dim., 203.
Petrescu Gh. Nic., 50.
Petrescu Virgil, 111, 114.
Petrică Ion, 150, 165, 203, 204, 205.
Petricoane D. M., 2.
Petrovici D., 114, 151, 153, 154, 165, 167, 168, 205,
Pispiris D. Gh., 86, 111, 151, 165, 167, 169.
Placă M., 46.
Plans M. Jose, 17.
Pleșoiu I. P., 114, 116, 150, 153, 165, 170.
Podariu Alex., 18, 20, 21, 36, 38, 48, 49, 51, 52, 64, 66, 68, 83, 84, 95, 97, 100, 101, 102, 103, 111, 114, 115, 116, 117, 132, 150, 151, 153, 154, 165, 167, 168, 190, 202.
Podeanu Aurel, 188, 190, 202.
Polaczek Fr., 46.
Pop Alex., 190, 200.
Pop I. Emilian, 189, 202.
Pop Iulian, 46, 47, 49, 51.
Popa Iulian, 52.
Popa Stefan, 36, 37, 53, 68, 102, 155.
Popa L. Victor, 130, 133.
Popa Zaharia, 113, 115.
Popeea G. Ovid, 187.
Popescu I. Alex., 46.
Popescu N, Cornelu, 18, 34, 46, 49, 51, 52, 189, 190.
Popescu Eugen, 114, 116, 132, 153, 165, 168, 204, 205.
Popescu N. Gh., 46.
Popescu N. Ion, 18, 49, 51, 83, 114, 115, 130 153, 155, 165, 190, 205.
Popescu Jean, 37.
Popescu Dem. M., 202.
Popescu L. Nic., 166.
Popescu N. Nic., 188.
Popescu Gh. Oridiu, 37, 53, 130, 133.
Popescu D. Stelian, 20, 22, 36, 37, 49, 54, 64, 65, 68, 69, 70, 81, 84, 85, 86, 95, 97, 99, 103, 111, 116, 150, 151, 154, 164, 165, 167.
Popescu St. Toma, 20, 36, 37, 66. 114, 116, 150, 151, 153, 154, 155, 168,
Popescu C. Virgiliu, 20. 36, 49, 50, 53, 68, 86, 101, 111, 115, 116, 132, 133, 150, 151, 153, 165, 166, 167, 168, 170.
Popluca M., 20. 38, 101. 102, 111, 114, 115.
Popovici Aurel, 46, 49, 51, 52.
Popovici C. Const., 188, 189, 190, 202.
Popovici Puiu. Dan, 46, 47, 49, 189, 202.
Popovici Mihai, 112, 113, 114, 116. 118, 130, 132, 133, 150, 153, 154, 155, 165, 168.
Popovici Th. Ion., 38. 46, 47, 49, 51, 170, 187, 188, 189, 190, 201, 202.
Popovici Tiberiu, 17, 59, 62, 109, 128, 186, 195.
Popovschi V., 155.
Popper Ervin, 165, 188, 205.
Potârniche Octav 49.
Potopeanu G., 52.
Preda L., 155.
Procopescu Nestor, 83, 114, 153, 154, 166, 167.
Protopopescu Gh. Col., 14.
Protopopescu I., 2, 37, 45, 49, 54, 99, 100.
Purcariu I., 155.
Purcariu Ilie, 2.
Puridilă Const., 49, 190, 202, 203.
Puscariu L., 155.
Puscă Toma 46, 49.

Raclis Rod., 7.
Rădulescu M., 20.
Rădulescu C. Mihai, 22, 48, 49, 50, 86, 114.
Răduleț B. Remus, 201.
Raciu Const., 203.
Rainer Gh., 68.
Râmniceanu I. Cristian, 101, 103, 111, 115, 116, 117, 130, 132, 167, 170, 205.
Răpeanu Virgil, 49, 50, 52, 80, 147.
Rappaport Avram 51.
Rătan I., 46.
Robu Ionel, 81.
Roibănescu C., 2.
Roman I. Ioan, 18, 20, 36, 37, 38, 49, 53, 63, 66, 68, 84, 85, 86, 97, 100, 101, 110, 111, 114, 116, 118, 132, 133, 150, 151, 152, 153, 165, 167, 168, 203, 204, 205.
Roșca I., 155.
Roșu Alex., 188, 189, 190, 202. 203.
Rucăreanu Nic., 46, 47.
Rusanda P. Gh., 22, 49, 51, 130.
Rusmănică Ion, 47, 153, 165, 167.

Săbăduș D., 115.
Sabetay Andrei, 66, 153, 165.
Saegiu Em., 2.
Săndulescu I. Ion. 50, 52.
Sântimbreanu Cornel, 114, 130.
Santo Semo, 37, 38, 100, 101.
Sassu V. I., 66, 167.
Șaur I. Ion, 112, 116, 117, 153, 165, 205.
Savin Arnold, 115, 150, 154, 165, 168.
Savin I., 20, 37, 38, 53, 65, 70, 95, 103, 111, 113, 115, 116, 130, 132, 150, 165, 167, 170. 205.
Savu C. Ioan, 86.
Savu S., 20.
Scarlat V. D., 38, 86, 114, 151, 153, 154, 165, 167, 168.
Scărlătescu T., 190.
Schächter M. Osias, 49, 203.
Scripcă Laur, 47, 49, 50, 188.
Scripcă Mihai, 37, 46, 51, 52, 113, 115, 188, 202, 205.
Scurtu A. Nic., 114, 116, 154.
Scurtu O. Nic., 115, 130, 151, 153, 165.
Secăroiu Dum., 20, 36, 66. 111, 132, 165, 205.
Segal Leon, 47, 48, 49, 51, 152.
Segărceanu D. C., 53, 116.
Selariu E., 155.
Șerban Aurel, 47. 49.
Șerban Mircea, 53.
Șerban Tiberiu, 188.
Șerbănescu D., 2.
Șerbănescu Mircea, 111.
Șerbănescu Ovid, 202.
Sergescu P., 2, 27, 187.

Severin C. Marcel, 47, 49.
Severineanu C., 2.
Sfințescu I. Duiliu, 51.
Sigall Louis, 51.
Silistrărianu C., 47.
Silion Gh. Ion, 187, 188, 189, 202.
Simniceanu S., 2.
Simionescu D. Gh., 188, 189. 190, 201, 202.
Simionov Kindin, 20, 35, 37, 49, 51, 101, 102, 189.
Sirkis Iosif, 111, 112, 150, 151, 153, 154, 165, 167, 205.
Sisu Gh., 153, 155, 165, 168, 205.
Slicariu C., 115, 154, 165.
Smilovici Paul, 115.
Socaciu Nic., 48, 49, 52, 189, 202.
Soimulescu I., 20, 38, 86, 101, 167.
Solacolu Serban, 187.
Solnițaru V. Longin, 100, 101, 103, 111, 114.
Solnițaru V. N., 38, 84, 97.
Spacu S. Petru, 47, 49, 51.
Spârchez Zeno, 47, 49, 188.
Spatariu I., 150.
Spri ceană Gh., 18, 20, 37, 38, 66, 84, 100, 101, 102, 112, 114, 116, 117, 150, 151, 153, 154, 165, 167, 168, 190, 203, 205, 206.
Sprinceană C. Ion, 38.
Stamatescu Val., 188, 189, 190, 202, 203.
Stamatiu Mih., 188, 189.
Stan C., 20, 37, 66, 83, 112, 155, 165, 168.
Stan V. Aurelian, 18, 20, 36, 37, 38, 51, 52, 53, 64, 66, 68, 70, 83, 84, 85, 86, 95, 101. 103, 111, 113, 114, 115. 116, 117, 118 119, 130, 133, 153, 165, 167, 204. 205.
Stăncescu C., 2.
Stănciulescu Ion, 47.
Stancov D., 155.
Stănescu Aurel, 189.
Stănciulescu Dan, 49, 50.
Steblea St., 18, 20, 37, 38, 53, 68, 85, 97, 101, 102, 114, 115, 130, 134, 153, 155, 165.
Stefănescu Aurel, 47.
Stefănescu Emil, 19, 107, 186, 187, 189.
Stefulescu I. Ghica, 202.
Stepanescu Carol, 115, 155.
Stingher Alex., 53.
Stoenescu C. Ion, 188, 189.
Stoenescu Gh., 189.
Stoian I., 47.
Stoica N. Aureliu, 19, 20, 21, 36, 37, 46, 47, 49, 51, 63, 64, 66, 68, 81, 83, 84, 85, 86, 95, 99. 100. 103, 190.
Stoicescu Gh., 203.
Stoicescu M., 2.
Stoicescu Teodor, 49.
Streit Victor, 205.
Surugiu Aurel, 47.
Șuselescu Ion, 189.

Tanase C. Gratian, 114, 115, 130.
Tarabuță C. Paul, 186, 187, 188, 189, 190, 201, 202.
Taraș V., 47, 48, 49, 51, 188, 189, 190, 202.
Tarția Valer Ioan, 114, 130, 155.
Tatulea Dionisie, 165.
Tauber Alex., 187.
Tănăsoiu M., 155.
Teodorescu Aurel, 205.
Teodorescu C., 2, 159.
Teodorescu C. C., 49.
Teodorescu M. D., 188, 189, 201, 202.
Teodorescu N., 47, 51 52, 188, 189. 202.
Teodosiu Avram, 2.
Thierrin G., 2.
Todor N., 155.
Tomescu Val., 18, 38, 70, 83, 151, 166.
Tomescu Nic., 116.
Toporescu E., 2.
Topleceanu Const., 205.
Triculescu Ioan, 18, 20, 37, 53, 66, 68, 86, 100, 101, 111, 114.
Tudose Tănase, 20, 50, 68, 114, 118, 151, 165, 167.
Tunaru Traian, 190.

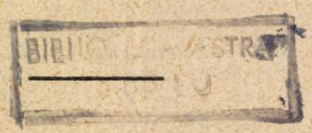
Tari N. Gh., 20, 46.
Țigoiu N., 47.
Tino O., 2.
Țino O. Ovidiu, 47.
Țintea Hariton, 110.
Țiucra Mircea, 205.

Ulea C. Titus, 47, 49, 50.

Vâlceanu Justin, 18, 37, 53, 66, 68, 83, 100, 111, 114, 115, 116, 117, 132, 151, 153, 154, 165, 167.
Vâlcovici V., 2, 43, 51 52, 96, 190, 206.
Vâlsănescu Viorel, 38, 100, 116, 165, 205.
Vancu A. Grig., 114.
Vasilescu Bartolomeu, 18, 37, 47, 49, 51, 83, 99, 190.
Vasiliev V., 21.
Vasiliev Ilie., 49, 51.
Vasiliu Alex., 51.
Vasiliu Gh., 2.
Vasiliu Gh. Gh., 18, 19, 20, 34, 36, 37, 38, 47, 49, 53 63, 66, 68, 80, 83, 84, 85, 86, 100, 101, 102, 114, 116, 117, 130, 133, 151, 153, 154, 165. 167, 168, 188, 189. 203.
Vasiliu C. Ion, 188, 189, 202.
Vasiliu M., 2.
Vasiliu Gh. N., 47, 188.
Vasiliu Tică, 165.
Vatașan Ovid, 188.
Velea Gr. Mihai, 46, 47.
Vlad I. V., 2.
Vlădea Ioan, 18, 47, 51, 80, 82.
Vlăduț Sabin, 189.
Voinescu Ion, 47.
Vonica C. Ion, 37, 53, 114, 153, 165.
Vuia Tr., 155.
Vulpanovici Boris, 46, 49, 190, 203.

Weintraub Mandy 38. 86, 153, 165.
Weiss Leon 186.
Weiss Solomon, 186, 189.
Winkler Alfred. 49, 50, 52.

Zagaican Ilie, 20, 37, 38, 47, 66, 83, 84, 99, 100, 101, 110, 111, 113, 115, 116, 130.
Zaharia O. Ion, 20, 36, 53, 102, 116, 150, 151, 154, 165, 167, 168, 205.
Zaharia O. Nic., 38, 53, 116, 150. 151, 153, 165, 167. 168, 205.
Zamfir Ilie 203.
Zamfirescu Alex., 51, 52.
Zamfirescu Gh., 155.
Zamfirescu Gh. Ion., 34, 46, 47, 48, 51, 52, 63, 103.
Zapan Gr., 2, 186.
Zaretchi M., 155.
Zugrăvescu Ion., 37, 86.



16044

5 lei